第七章

道德风险

当委托人向一个代理人委派任务时，激励问题就会出现。然而,从代理制存在的事实中我们可以推知委托人有可能无法观测代理人的一些行动，例如一项工作的成功的可能性与雇员的努力水平相关，但是由于雇主不能观测到这个努力水平，雇员有可能偷懒，这时就存在道德风险（“败德”行为）。

在存在道德风险的情形下，产出是代理人的努力水平和随机因素的综合。可是，委托人只能根据可以观测到的代理人的工作表现来设计合同。尽管这一合同不可能直接依照代理人的行为给出他的报酬。我们关心的问题是委托人如何设计一个激励合同来诱导代理人实施最优的努力水平。

7.1 团队中的道德风险

假设一个团队由I个风险中性的成员组成，总产出x是每个成员努力水平$e_i(e_i \geq 0)$的函数，即$x = f(e_1, e_2, \cdots, e_I)$。这里我们假设没有不确定性，总产出是可观测的而个人的努力水平是不可观测的。由于是风险中性的，不失一般性，我们假设第i个成员的效用函数是$u_i(s_i, e_i) = s_i(x) - e_i$，其中$s_i(x)$是他的合同工资，是总产出水平的函数，并且这里假设预算是平衡

的，即$\sum_i s_i(x) = x$。

我们的问题是是否存在能生产有效产出的一个工资方案$S_i(x)$？答案是否定的（假设$s_i(x)$是可微的）。

证明：显然每个成员都会选择最大化其效用的努力水平，即：

$$e_i = \arg\max_{e_i} [s_i(f(e) - e_i)] \tag{7.1}$$

由一阶条件可得，对于所有的i：

$$s_i' f_i(e) = 1 \tag{7.2}$$

我们再来考察有效的努力水平，它必须要满足$\max_e [f(e) - \sum_i e_i]$。不然的话，我们可以改变某些人的努力水平并重新分配工资而让他们都变得更好。而这个最大化问题的解是$f'(e) = 1$，由$s_i' f_i(e) = 1$可得$s_i' = 1$。这和预算约束$\sum_i s_i(x) = x$的结果$\sum_i s_i'(x) = 1$相矛盾。因而有效的努力水平是不存在的。

7.2 简单的道德风险（委托代理）问题

委托代理理论试图解决如下一类问题：委托人（P）想诱导代理人（A）按照她的利益行动，但是她不能直接观测到代理人选择了什么行动（努力水平），能观测到的只是另一些变量，这些变量由代理人行动和其他的外生随机因素共同决定，因而能观测到的结果只是代理人行动的不完全信息。委托人的问题就是如何根据这些观测到的信息来奖惩代理人，以激励代理人选择对委托人最有利的行动。

令e来表示代理人选择的努力水平，假设他的效用函数是$u(m, e) = u(m) - c(e)$，且$u' > 0$，$u'' < 0$，$c' > 0$，$c'' > 0$，其中m是他的财富；委托人的效用函数是$v(m)$，且$v' > 0$，$v'' < 0$。令θ是不受他们控制的外生随机变

量（自然状态），取值范围是Θ，分布函数和密度函数分别是$G(\theta)$和$g(\theta)$。代理人选择努力水平后，外生随机变量实现，共同决定一个可观测的产出$x(e,\theta)$。而委托人的问题就是要设计一个激励合同$s(x(e,\theta))$，根据观测到的x对代理人进行奖惩。我们想要分析的就是委托人如何设计这样一个有效的激励合同。

委托人的期望效用函数是：

$$\int v(x - s(x(e,\theta)))\, g(\theta)\, d\theta \tag{7.3}$$

但是要受到来自代理人的两个约束：第一个是代理人的参与约束（或个人理性，IR），即代理人从合同中得到的期望效用不能小于不接受合同的期望效用，后者又称为保留效用，我们用$\underline{u}$来表示。参与约束可以写为：

$$(IR)\max_e \int [u(s(x(e,\theta))) - c(e)]\, dG(\theta) \geq \underline{u} \tag{7.4}$$

第二个约束是代理人的激励相容约束（IC），即代理人总是要选择最大化自己期望效用的努力水平，表达如下：

$$(IC)\max_e \int [u(s(x(e,\theta))) - c(e)]\, dG(\theta)$$

道德风险问题的解决一般使用“分布函数的参数化方法”（Mirrlees，1974、1976和Hölmstrom，1979），即将自然状态θ的分布函数转换为观测结果x在努力水平e下的条件分布函数，这样代理人在不同努力水平之间的选择就等价于在不同的分布函数之间的选择，那么上述的IR条件和IC条件就可以重写为：

$$\begin{aligned} &(IR)\int u(s(x))\, f(x|e)\, dx - c(e) \geq \underline{u} \\ &(IC)\max_e \int u(s(x))\, f(x|e)\, dx - c(e) \end{aligned} \tag{7.5}$$

我们分两步来求解，首先求出能实施每一有效努力水平e的激励合同$s(\cdot)$，然后再求出这个努力水平e。下面我们先来分析对称信息即努力水平是可观测的时候最优合同设计，这也是我们分析问题的基准。

如果努力水平是可观测的，委托人就可以根据观测到的结果对代理人实行奖惩（因为每一结果都对应唯一的努力水平），所以激励相容约束就没有了，而委托人此时可以设计如下的一个强制合同（forcing contract）：如果代理人选择委托人想要的最优努力水平，她支付工资$\tilde{s}(x,e)=s(x)$；如果不是她所想要得到的努力水平，支付工资$\tilde{s}(x,e)=0$。激励工资合同只要满足下面的条件即可：

$$\begin{aligned} &\max_{e,s(\cdot)} \int v(x-s(x))\, f(x|e)\, dx \\ s.t.\,(IR) &\int u(s(x))\, f(x|e)\, dx - c(e) \geq \underline{u} \end{aligned} \tag{7.6}$$

我们构造如下的拉格朗日函数（IR条件的拉格朗日乘子为λ）：

$$L(s(x)) = \int v(x-s(x))\, f(x|e)\, dx + \lambda\left[\int u(s(x))\, f(x|e)\, dx - c(e) - \underline{u}\right]$$

一阶条件是：

$$-v'(x-s(x))\, f(x|e) + \lambda u'(s(x))\, f(x|e) = 0 \tag{7.7}$$

从中我们可得：

$$\lambda = \frac{v'(x-s(x))}{u'(s(x))} \tag{7.8}$$

由于$v'>0$，$u'>0$，所以$\lambda>0$，这就是说IR条件是紧的。

由最优化条件可知，委托人和代理人收入的边际效用之比是一个常数，与产出无关，那么委托人和代理人在不同收入状态下的边际替代率也是一样的，很明显这是典型的帕累托最优条件。

如果委托人和代理人都是风险厌恶的（$v''<0$，$u''<0$），最优化条件也就是一个最优风险分担条件，即要求双方都承担一定的风险。举例来说，假

设双方效用函数都是CARA型的，$u(x) = -e^{-r_1 x}$，$v(x) = -e^{-r_2 x}$。如果我们令$\varepsilon_i = \frac{1}{r_i}$，那么最优风险分担要求：

$$\lambda = \frac{r_1 e^{-r_1 s(x)}}{r_2 e^{-r_2(s(x)-x)}} \tag{7.9}$$

可得$s(x) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}x + c$，其中$c$是常数，总的风险容限（risk tolerance）是$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$。

如果委托人是风险中性的。不失一般性，假设$v' = 1$。最优风险分担就变成$\lambda = \frac{1}{u'(s(x))}$，即$u'(s(x))$是一个常数，此时代理人得到一份固定工资，因而不承担任何风险。而风险中性的委托人承担所有的风险，此时的合同就如同一个对代理人的全保险合同。

同样，如果代理人是风险中性的而委托人是风险厌恶的，将由代理人承担所有的风险而委托人得到一个固定的收入。此时的合同就如同委托人把剩余索取权以一个固定的价格卖给了代理人，在后面我们还会涉及到类似的情形。

我们现在还有一个问题就是如何求出委托人想要的努力水平。为了简化计算过程，我们假设委托人是风险中性的，答案可以从代理人的IR条件中得到。在上面的过程中我们知道，代理人的个人理性条件束紧，即

$$\begin{aligned} u(s(x)) - c(e) &= \underline{u} \\ \Rightarrow s(x) &= u^{-1}(\underline{u} + c(e)) \end{aligned}$$

于是可以从委托人的最大化问题中求解最优的努力水平：

$$\begin{aligned} \max_e \underbrace{\int xf(x|e)\,dx}_{\text{收益}} - \underbrace{u^{-1}(u + c(e))}_{\text{成本}} \\ = E[x|e] - u^{-1}(u + c(e)) \end{aligned}$$

很明显的，委托人只要让努力的边际收益和边际成本相等就可以得到最优的努力水平。

从下面开始，我们来讨论道德风险问题所要研究的主题：当努力水平是不可观测时，委托人如何设计激励合同。

首先我们假设委托人和代理人都是风险中性的，即$u(x) = v(x) = x$。显然这个时候没有人需要保险。我们有如下的定理：

定理 7.1 委托人把企业“卖给”代理人可以实现第一优（first best，简记FB）。

这也就是说激励合同$s(x) = x - \alpha$可以实现第一优，其中α就是企业的价格，而此时代理人就变为了剩余权索取者。这可以从代理人的IC条件推出：

$$\begin{aligned} e^* &= \arg\max_e \int (x-\alpha) f(x|e)\, dx - c(e) \\ &= \arg\max_e \int x f(x|e)\, dx - c(e) \\ &= \arg\max_e E[x|e] - c(e) \quad \text{(第一优的努力水平)} \\ &= \int v(x - s(x)) f(x|e)\, dx + \int u(s(x)) f(x|e)\, dx - c(e) \end{aligned}$$

从中我们看到了e^*最大化了两者效用的和，因而是第一优的。

从束紧的IR条件中可以求出α：

$$\alpha = E\left[x|e^{FB}\right] - c\left(e^{FB}\right) - \underline{u} \tag{7.10}$$

接下来我们假设代理人是厌恶风险的而委托人仍为风险中性的。假设代理人的努力水平只有两种：高（e_H）和低（e_L），成本分别是c_H和c_L，并且$c_H > c_L$。两种努力水平下产出的条件分布函数分别是F_H和F_L，我们有如下的假设：

$$F_H \succsim_{FOSD} F_L \tag{7.11}$$

由一阶随机占优可知，对于所有的x而言，有$F_H \le F_L$。这等价于对于任意非递减的函数$g(\cdot)$有：

$$\int g(x)\, dF_H(x) \ge \int g(x)\, dF_L(x) \tag{7.12}$$

这个假设的意思是说随着产出的越来越高，代理人实施高努力的概率越来越大（统计意义上）。

下面我们的问题就变为委托人如何激励代理人实施她所想要的努力水平以及相应的激励工资。如果委托人想让代理人高努力工作，那么激励工资必须满足代理人的IC约束和IR约束：

$$\begin{aligned}&(IC)\int u\left(s\left(x\right)\right)f_H\left(x\right)dx-c_H\geq\int u\left(s\left(x\right)\right)f_L\left(x\right)dx-c_L\\&(IR)\int u\left(s\left(x\right)\right)f_H\left(x\right)dx-c_H\geq\underline{u}\end{aligned}\tag{7.13}$$

而委托人的最大化效用是：

$$\max_{s(\cdot)}\int\left(x-s\left(x\right)\right)f_H\left(x\right)dx\tag{7.14}$$

我们构造如下的拉格朗日函数（IC约束和IR约束的拉格朗日从乘子分别是μ和λ）：

$$L\left(s\left(x\right)\right)=s\left(x\right)f_H\left(x\right)+\mu\left[u\left(s\left(x\right)\right)\left(f_H\left(x\right)-f_L\left(x\right)\right)\right]+\lambda u\left(s\left(x\right)\right)f_H\left(x\right)$$

对$s\left(x\right)$微分即得：

$$-f_H\left(x\right)+\mu u'\left(s\left(x\right)\right)\left(f_H\left(x\right)-f_L\left(x\right)\right)+\lambda u'\left(s\left(x\right)\right)f_H\left(x\right)=0\tag{7.15}$$

重整即为：

$$\frac{1}{u'\left(s\left(x\right)\right)}=\lambda+\mu\left(1-\frac{f_L}{f_H}\right)\tag{7.16}$$

对于此，我们有如下的说明：

1、IR条件紧。

我们可以用反证法来证明：假设$\lambda=0$，这意味着：

$$0\leq\frac{1}{u'\left(s\left(x\right)\right)}=\mu\left(1-\frac{f_L}{f_H}\right)\tag{7.17}$$

那么对于所有的x则有：$1 \geq \frac{f_L(x)}{f_H(x)}$或者说$f_H(x) \geq f_L(x)$。但是这和密度函数的积分等于1相矛盾，故假设不成立，所以$\lambda > 0$，即IR条件束紧。

或者也可以这样来证明：对式(7.16)两边同乘$f_H(x)$后取期望可得：

$$\lambda = E\left[\frac{1}{u'(s(x))}\right] > 0 \tag{7.18}$$

2、IC条件束紧。

把λ的表达式带入式(7.16)可得：

$$\mu\left(1 - \frac{f_L}{f_H}\right) = \frac{1}{u'(s(x))} - E\left[\frac{1}{u'(s(x))}\right] \tag{7.19}$$

两边同乘$f_H(x)\,u(s(x))$即为：

$$\mu(f_H - f_L)\,u(s(x)) = f_H(x)\,u(s(x))\left[\frac{1}{u'(s(x))} - E\left(\frac{1}{u'(s(x))}\right)\right] \tag{7.20}$$

对q积分并由库恩-塔克条件$\mu\left[\int u(s(x))(f_H(x) - f_L(x))\,dx - \Delta c\right] = 0$（其中$\Delta c = c_H - c_L > 0$）可得：

$$\mu\Delta c = cov\left(u(s(x)), \frac{1}{u'(s(x))}\right) \tag{7.21}$$

很显然$u(s(x)$和$\dfrac{1}{u's(x)}$都是关于$s(x)$的增函数，所以$cov(u(s(x)), \frac{1}{u'(s(x))}) > 0$，从而$\mu > 0$。

其实$\mu = 0$破坏了激励相容约束,由式（7.16）可知$\dfrac{1}{u'(s(x))} = \lambda$，边际效用是一个常数，这相当于代理人被完全保险了，那代理人为什么还会高努力工作呢？

3、工资是似然率$\dfrac{f_L}{f_H}$的单调函数。

这个从式（7.16）就可以看出，但我们关心的是工资和可观测的产出有没有必然的关系。对此我们有：

- 如果$\frac{f_L}{f_H}$=1，那么委托人不能从观测到的产出推断出代理人是不是在高努力的工作，对代理人也没有任何的奖励或者惩罚。

- 如果$\frac{f_L}{f_H} > 1$，这样的似然率说明高努力生产条件下高产出的概率要比低努力大。此时委托人应该奖励高产出以激励代理人高努力的工作。

- 如果$\frac{f_L}{f_H} < 1$，委托人应该惩罚产高产出来激励低努力工作。

由于信息的不对称，代理人也要承担一定的风险。令对称信息高努力的工资为$s^*(x)$，那么则有：

$$\begin{cases} s^*(x) = s_H(x) & \text{当且仅当} f_H = f_L \\ s^*(x) > s_H(x) & \text{当且仅当} f_H > f_L \\ s^*(x) < s_H(x) & \text{当且仅当} f_H < f_L \end{cases}$$

这个意思是说，对于某个水平的产出，如果在代理人低努力工作出现的概率高于高努力工作时的概率，那么他就会受到惩罚；相反，如果产出在高努力工作出现的概率高于低努力工作时的概率，代理人就会受到奖励。从另一个角度来看，代理人的工资有了很大的波动，所以他必须得承担这个风险。但是正如我们要看到的，他承担风险是需要补偿的，这就是委托人要付给代理人的信息租。

以上结果反映了似然率$\frac{f_L}{f_H}$所包含的信息量，它告诉观测者观测到的产出有多大程度上时来自分布f_L而不是f_H：较高的似然率说明产出有较大的可能来自f_L；较低的似然率说明有较大的可能来自f_H；似然率等于1时，来自两个分布的可能性相同，观测者不能得到任何新的信息。

这并不是一个统计推断的问题，虽然从事后看来委托人是根据统计推断原则行事。比如说，我进行一次测试并假装通过统计推断的原则来激励学生努力学习。这样当你考试不及格并来找我对我说：“我已经很努力的学习了，只是这次考试运气太差了才不及格。”但是我只能说：“我知道，但是不管怎么说你不及格啊。”如果我不那样说的话，我就不可能在事前正确的激励学生努力学习，不然，所有不及格的学生都会来找我，并向我做那样的解释。

一般说来，工资都是随着产出的增加而递增的，为此我们假设似然率是单调的即满足所谓的单调似然率特征，这是一个比一阶随机占优更强的假设，由MLRP可以推出FOSD，但反之不成立。

单调似然率的一个应用就是保险中免赔额的确定。当投保人的行为可以影响事故发生概率时，就存在道德风险的问题。为了解决这个问题，保险公司就设置一个免赔额，这里我们简单介绍一下，以后还会做更详细的讨论。

假设事故发生的概率是$p \in \{p_H, p_L\}$，他们都是代理人行为的函数，事故的条件损失函数是$g(x)$。似然率是：

$$\begin{cases} \dfrac{f_L(x)}{f_H(x)} = \dfrac{1-p_L}{1-p_H} & \text{当}x = 0\text{时} \\ \dfrac{f_L(x)}{f_H(x)} = \dfrac{p_L}{p_H} & \text{当}x < 0\text{时} \end{cases}$$

在后面的讨论中，我们看到保险应该采取免赔额的形式，并且这个免赔额不依赖于损失的程度。

最后我们用下面这个例子来结束本节的讨论：

假设代理人的努力水平是连续的而结果只有两种：$x \in \{0,1\}$，并记$prob(x=1|e) = p(e)$，而且$p(0) = 0$，$p(\infty) = 1$，$p'(0) > 1$，$p'(e) > 0$，$p''(e) < 0$。努力的成本函数是$c(e) = e$，保留效用是0。

假设内点解存在，由代理人的IC约束

$$(IC)\max_{e} p(e)u(w_1) + (1-p(e))u(w_0) - e \tag{7.22}$$

可得：

$$p'(e)(u(w_1) - u(w_0)) = 1 \tag{7.23}$$

委托人就面临如下的规划：

$$\begin{aligned} &\max_{w_1,w_0,e} p(e)v(1-w_1) + (1-p(e))v(-w_0) \\ s.t.\quad & p(e)u(w_1) + (1-p(e))u(w_0) - e \geq 0 \\ & p'(e)(u(w_1) - u(w_0)) = 1 \end{aligned} \tag{7.24}$$

可解：

$$\begin{cases} \dfrac{v'(1-w_1)}{u'(w_1)} & = & \lambda+\mu\dfrac{p'(e)}{p(e)} \\ \dfrac{v'(-w_0)}{u'(w_0)} & = & \lambda+\mu\dfrac{-p'(e)}{1-p(e)} \end{cases}$$

这就是最优激励合同的隐性解，给出特定的函数，我们就可以解出具体的解。

7.3 线性合同

我们假设代理人效用函数是CARA型的，即$u(w)=-e^{-r(w-c(e))}$，其中$c(e)$是努力e的成本函数。保留工资是$\underline{w}$。产出$x=e+\theta$，其中θ服从正态分布$N\left(0,\sigma^2\right)$。假设合同采取线性的形式：$s(x)=ax+b$.那么委托人的目标函数就是最大化$\int(x-s(x))\,dF(x|e)$，代入$s(x)=ax+b$可得$\max_{\{a,b,e\}}(1-a)\,\mu(x|e)-b$，其中$\mu(x|e)$表示期望。这等价于：

$$\begin{aligned} &\max_{\{a,b,e\}}(1-a)\,e-b \\ s.t.\quad &(IR)\int u(ax+b-c(e))\,dF(x|e)\geq u(\underline{w})=\underline{u} \\ &(IC)e=\arg\max_{e'}\int u(ax+b-c(e'))\,dF(x|e') \end{aligned}$$

对于正态分布，有$Eu(z)=u\left(\mu_z-\frac{1}{2}r\sigma_z^2\right)$，那么从$IR$条件可得：

$$ae+b-\frac{1}{2}ra^2\sigma^2-c(e)\geq\underline{w} \tag{7.25}$$

从IC条件可得：

$$e=\arg\max_{e'}ae'+b-\frac{1}{2}ra^2\sigma^2-c\left(e'\right) \tag{7.26}$$

如果成本函数是凸的（$c''(e)>0$），那么目标函数就是凹的，一阶方法（first order approach，简记FOA）就是适用的。从IC条件易得$a=c'(e)$。对代理人来说，这就是边际收益等于边际成本的基本原则。

生产的确定性等价是：

$$\underbrace{e}_{\text{总产出}} - \underbrace{c(e)}_{\text{生产成本}} - \underbrace{\frac{1}{2}ra^2\sigma^2}_{\text{风险升水}} \tag{7.27}$$

显然风险升水是在不对称信息下诱导努力的成本：为了诱导代理人努力工作，委托人需要让代理人承担一定的风险，风险升水就是代理人对此风险索取的补偿。

代入$a = c'(e)$可得

$$\max_e e - c(e) - \frac{1}{2}r\left(c'(e)\right)^2\sigma^2 \tag{7.28}$$

一阶条件：$1 - c'(e) - r\sigma^2 c''(e)\, c'(e) = 0$ 或者$c'(e)\left(1 + r\sigma^2 c''(e)\right) = 1$. 故我们可以得到：

$$a = c'(e) = \frac{1}{1 + r\sigma^2 c''(e)} \tag{7.29}$$

这个条件意味着代理人必须承担一定的风险，而且a关于r和σ^2是递减函数。就是说，代理人越不厌恶风险，产出波动越小，代理人越是偏好于努力工作，它应该承担的风险就越大。极端的，如果代理人是风险中性的（$r = 0$），最优合同要求代理人承担所有的风险（$a = 1$），此时就相当于委托人把剩余索取权卖给了代理人。这同时还说明最优合同是在激励与保险之间的权衡。r或σ^2越大，风险成本越高，因此最优风险分担要求a越小。而当$c''(e)$低的时候，就很容易提供激励，此时代理人努力的边际负效用对努力的变化来说不敏感，那么委托人让代理人承担风险可以获得相对较高的收益。

最后我们要说明一下合同为什么是线性的。

第一，如果允许代理人对产出自由处置（free disposal）的话，工资必须是单调的，线性合同保证了这一点。

第二，Mirrlees问题（1974）。Mirrlees提出如下的一个步进式合同几乎可以实现第一优的努力水平：

$$s(x)=\begin{cases} s^* & \text{如果} x\geq x_0 \\ -k & \text{如果} x<x_0 \end{cases}$$

其中s^*和k满足$u(s^*)=c(e^*)$和$u(-k)=-\infty$。直观的说，处罚是如此之大，以至于代理人不敢不努力工作。而对于每个x_0，选择k使得下式成立：

$$\left[\Phi\left(\frac{x_0-e_H}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_0-e_L}{\sigma}\right)\right]\left[u(s^*)-u(-k)\right]=c_H-c_L$$

其中Φ是标准正态分布函数。

但是标准正态分布有这样的性质：

$$\lim_{x_0\to-\infty}\frac{\Phi\left(\frac{x_0-e_H}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{x_0-e_L}{\sigma}\right)}=1$$

那么代理人在激励合同中由于不努力的效用损失趋向于0。

但是，这个合同不是稳健的（robust）。它还依赖于诸多的因素，例如效用函数的形式、技术、环境等等，而且这个合同过多的依赖代理人只是一次性的选择努力这样一个假设。这不是一个现实的假设，因为代理人总是不停的要作出同样的选择，如在一个月或者一年里，更现实的模型是（一维布朗运动）：

$$dx(t)=\mu(t)\,dt+\sigma dB(t)$$

其中$t\in[0,1]$，B与之共方差$\sigma^2 dt$，那么由CARA型的效用函数

$$u=-\exp\left\{-r\left(s(x)-\int c(\mu(t))\,dt\right)\right\}$$

其中$c(\mu)$是凸的，同样可以推导出一个线性的合同$s(x)$。

或者，我们可以这样来考虑：假设代理人一年工作T天，其中高产出H的有N天，剩余都是低产出L。那么一年的总产出是：

$$y=TL+N(H-L)$$

总工资是：

$$w = T\left(w_L\right) + N\left(w_H - w_L\right)$$

显然$N = \frac{y-TL}{H-L}$，那么

$$w = \frac{T\left(Hw_L - Lw_H\right)}{H-L} + \frac{w_H - w_L}{H-L}y$$

仍然是是线性的形式！

7.4 充分统计量

委托代理模型一个重要的结果就是可以解释什么样的观测变量应该进入激励合同。现在假设除了产出x之外，委托人还可以观测到另一个变量，比如说是另一个代理人从产出x'，假设这两种产出之间有某种关系或同时与自然状态相关。那么，我们要问的问题是：什么条件下委托人对代理人的激励工资不仅要依赖于x，而且还依赖于x'？这就涉及到充分统计量的问题。

首先我们给出充分统计量的定义：

定义 7.2 如果存在$g_i \geq 0$和$h_i \geq 0$使得对于所有$(y, a) \in Y \times A$下式成立：

$$f(y, a) \equiv h_i\left(y, a_{-i}\right) g_i\left(T_i(y), a\right)$$

那么$T_i(y)$相对于a_i而言是y的充分统计量。如果对于所有的i，$T_i(y)$相对于a_i而言是y的充分统计量，那么$T(y) \equiv \{T_i(y)\}_{i=1}^N$对$a$而言就是$y$的充分统计量。

从这个定义，我们可以得到下面这样的定理：

定理 7.3 如果$T(y)$相对于a而言是y的充分统计量，那么给定任意的工资方案$w(y) \equiv \{w_i(y)\}_i$，都存在另一个工资方案$\tilde{w}(T(y)) \equiv \{w_i(T(y))\}_i$ 帕累托弱占优于$w(y)$（这里帕累托占优是委托人在$\tilde{w}(T(y)) \equiv \{w_i(T(y))\}_i$下的期望效用高于$w(y)$）。

证明：由$\tilde{w}_i\left(T_i\right)$的定义可知：

$$
\begin{aligned}
u_i\left(\tilde{w}_i\left(T_i\right)\right) \equiv & \int_{\left\{y \mid T_i(y)=T_i\right\}} u_i\left(w_i(y)\right) \frac{f(y, a)}{g_i\left(T_i, a\right)} d y \\
= & \int_{\left\{y \mid T_i(y)=T_i\right\}} u_i\left(w_i(y)\right) h_i\left(y, a_{-i}\right) d y \\
\leq & u_i\left(\int_{\left\{y \mid T_i(y)=T_i\right\}} w_i(y) h_i\left(y, a_{-i}\right) d y\right)
\end{aligned}
$$

最后一个不等式是从Jensen不等式得到的。那么则有：

$$
\tilde{w}_i\left(T_i\right) \leq \int_{\left\{y \mid T_i(y)=T_i\right\}} w_i(y) h_i\left(y, a_{-i}\right) d y \tag{7.30}
$$

积分可得：

$$
\int_Y \tilde{w}_i\left(T_i(y)\right) f(y, a) d y \leq \int_Y w_i(y) f(y, a) d y \tag{7.31}
$$

即委托人在工资方案$\tilde{w}(T(y))$下付出去的平均工资不高于工资方案$w(y)$付出去的平均工资。

充分统计量结果对最优激励合同的设计有着重要意义。首先一点是，对代理人实施监督有意义的。因为监督可以提供更多的有关代理人行动选择的信息，从而可以减少代理人的风险成本。当然，监督本身的成本必须考虑进去。如果监督成本过高，监督可能是没有意义的，即使它可以提供更多的信息。更为重要的是，充分统计量结果意味着使用相对业绩比较是有意义的。这一点在下一节有详细的讨论。

7.5 相对业绩评估

我们经常可以看到，一个经理的工资不仅依赖于本企业的经营业绩，而且还依赖于同行业其他企业的经营业绩。这是因为同行业不同企业的经理的经营业绩除了受到自己的努力水平和特有的外生因素影响外，也受到该行业

某些共同因素的影响。本企业的产出不再是自己努力水平的充足分统计量，其他企业的产出也可能包含有关该企业努力水平的有价值的信息。比如说，一个企业利润低可能是由于经理没有努力工作，也可能是由于不利的外部因素。但如果其他同行业类似企业的利润也很低，那么就更可能是由于外部因素不利导致的；相反，如果其他企业利润较高，则说明利润低更可能是由于经理不努力工作的结果。此时，通过把其他企业的利润指标引入对该企业经理的激励合同，可以剔除更多的外部不确定性因素的影响，使经理的工资与其个人努力的关系更为密切，这也可以调动其努力工作的积极性。因此，处于类似经营环境的企业经理的工资不应该只依赖于本企业的利润，而应该部分的依赖于其他企业的利润。

这里我们使用状态一空间参数化方法，即$\tilde{x} = x\left(a, \tilde{\theta}\right) \equiv \sum_i x_i(a_i, \tilde{\theta}_i)$，其中每个$x_i$是合同里的变量，$\tilde{\theta}$是随机变量。我们有如下的定理：

定理 7.4 *假定x_i关于θ都是单调的，那么当且仅当θ_i是相互独立的，第i个代理人的工资仅仅依赖于他自己的产出。*

证明：如果θ_i是相互独立的，那么参数分布函数满足：

$$f\left(x, a\right) = \prod_{i=1}^{N} f_i\left(x_i, a_i\right)$$

则$T_i\left(x\right) = x_i$对a_i而言是x的充分统计量。

现在我们假设θ_1和θ_2是相互之间不独立的，但是第一个代理人的工资却不依赖于第二个代理人的产出。由于在均衡中，第二个代理人的行动可以被推断出来，不失一般性，假定$x_2 = \theta_2$。那么$x_2 = \theta_2$的联合条件分布函数由下式给出：

$$f\left(x_1, \theta_2, a_1\right) = \tilde{f}\left(x_1^{-1}\left(a_1, x_1\right), \theta_2\right) \tag{7.32}$$

其中$\tilde{f}\left(\theta_1, \theta_2\right)$是$\theta_1$和$\theta_2$的联合概率密度。

那么则有：

$$\frac{f'_{a_1}(x_1,\theta_2,a_1)}{f(x_1,\theta_2,a_1)}=\frac{\tilde{f}'\left(x_1^{-1}(a_1,x_1),\theta_2\right)}{\tilde{f}\left(x_1^{-1}(a_1,x_1),\theta_2\right)}\frac{\partial x_1^{-1}(a_1,x_1)}{\partial a_1} \tag{7.33}$$

既然θ_1和θ_2相互之间不独立，那么$\frac{f'_{a_1}}{f}$就和θ_2有关，因此T 在全局上不是充分统计量，并且w_1应该依赖于x_2。

7.6 多项任务—对称的任务

这一节里我们分析委托人要求代理人同时完成两项任务时最优激励合同的设计问题。代理人为委托人完成两项任务，假设任务之间是对称的，其努力分别为$e^1,e^2\in\{0,1\}$，记π_1为努力工作时成功的概率，π_0为不努力时成功的概率，且$\pi_1>\pi_0$。显然有三种可能的总努力水平：代理人同时在两项任务上都努力，只在一项任务上努力和在两项任务上都没努力。对于这些努力水平，代理人相应的负效用分别是Ψ_2、Ψ_1和$\Psi_0=0$，当然$\Psi_2>\Psi_1>0$。而且，当$\Psi_2>2\Psi_1$时我们说这两项任务时互替的，这是说当一项任务执行后，另一项任务更难以被执行；当$\Psi_2<2\Psi_1$时是互补的，此时一项任务执行后另一项任务执行的难度降低。

由于任务是对称的，故两项任务有相同的随机收益$\bar{s}$或者$\underline{s}$，由于这些收益是独立分布的，所以对委托人而言有三种可能的结果：$2\bar{s}$、$\bar{s}+\underline{s}$和$2\underline{s}$。相应地，支付的工资分别是$\bar{t}$、$\hat{t}$和$\underline{t}$。

首先我们来看第一优的情形，即相当于是委托人自己完成任务，或者她利用一个风险中性的代理人完成任务，或者努力水平是可观测的。

由于任务之间是独立的，所以在两项任务上都努力工作给委托人带来的效用是

$$V_2^{FB}=2\left(\pi_1\bar{s}+(1-\pi_1)\underline{s}\right)-\Psi_2$$

其中$C_2^{FB}=\Psi_2$是实施两种努力的第一优成本。

如果委托人只想在一项任务上努力工作，那么她的效用是

$$V_1^{FB} = \pi_1 \bar{s} + (1 - \pi_1)\, \underline{s} + \pi_0 \bar{s} + (1 - \pi_0)\, \underline{s} - \Psi_1 \tag{7.34}$$

其中$C_1^{FB} = \Psi_1$是实施一种努力的第一优成本。

如果委托人在两项任务上都不想实施努力，那么她的效用是

$$V_0^{FB} = 2\left(\pi_0 \bar{s} + (1 - \pi_0)\, \underline{s}\right) \tag{7.35}$$

如果委托人想要代理人在两项任务上都努力工作，那么要有$V_2^{FB} \geq \max\{V_1^{FB}, V_0^{FB}\}$，或者：

$$\Delta\pi\Delta s \geq \max\{\frac{\Psi_2}{2}, \Psi_2 - \Psi_1\} \tag{7.36}$$

其中$\Delta\pi = \pi_1 - \pi_0$,$\Delta s = \bar{s} - \underline{s}$。

下面我们来分析努力是不可观测的情形。首先我们假设委托人想激励代理人在两项任务上都努力工作，很显然只有在两项任务都成功的时候她才会奖励代理人，所以$\bar{t} > \hat{t} = \underline{t} = 0$。可是要这样做，必须满足代理人的两个$IC$约束：

$$\begin{aligned} \pi_1^2 \bar{t} - \Psi_2 \geq& \pi_1 \pi_0 \bar{t} - \Psi_1 \\ \pi_1^2 \bar{t} - \Psi_2 \geq& \pi_0^2 \bar{t} \end{aligned} \tag{7.37}$$

其中第一个是防止代理人只在一项任务努力工作的局部IC约束，第二个是防止代理人在两项任务上都不努力工作的全局IC约束。两个IC约束又可以写为：

$$\bar{t} \geq \frac{1}{\Delta\pi} \max\{\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\pi_1}, \frac{\Psi_2}{\pi_1 + \pi_0}\} \tag{7.38}$$

那么委托人的问题就是：

$$\max_{\bar{t}} \pi_1^2 \left(2\vec{s} - \bar{t}\right) + 2\pi_1 \left(1 - \pi_1\right) \left(\bar{s} + \underline{s}\right) + 2\left(1 - \pi_1\right)^2 \underline{s}$$

$s.t.$式(7.38)

显然实施两种努力的第二优（SB）成本是：

$$C_2^{SB} = \pi_1^2 \bar{t} = \frac{\pi_1}{\Delta\pi} \max\{\Psi_2 - \Psi_1, \frac{\pi_1 \Psi_2}{\pi_1 + \pi_0}\} \tag{7.39}$$

而委托人得到的效用是：

$$V_2^{SB} = 2\left(\pi_1 \bar{s} + (1 - \pi_1)\underline{s}\right) - \frac{\pi_1}{\Delta\pi} \max\{\Psi_2 - \Psi_1, \frac{\pi_1 \Psi_2}{\pi_1 + \pi_0}\} \tag{7.40}$$

如果委托人只想让代理人在一项任务上实施努力，那么她得到的效用是：

$$V_1^{SB} = \pi_1 \bar{s} + (1 - \pi_1)\underline{s} + \pi_0 \bar{s} + (1 - \pi_0)\underline{s} - \frac{\pi_1 \Psi_1}{\Delta\pi} \tag{7.41}$$

在任务是互替的情形下（当任务是互补的时候,委托人不可能只激励代理人在一项任务上努力，因为$\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\pi_1 \Delta\pi} < \frac{\pi_1 \Psi_1}{\Delta\pi}$，局部和全局$IC$约束之间矛盾），实施成本是：

$$C_1^{SB} = \frac{\pi_1 \Psi_1}{\Delta\pi} > \Psi_1 = C_1^{FB} \tag{7.42}$$

现在我们的问题是委托人在道德风险情形下是否愿意激励代理人在两项任务上都努力工作。这取决于$\max\{\Psi_2 - \Psi_1, \frac{\pi_1 \Psi_2}{\pi_1 + \pi_0}\}$。首先我们来看$\Psi_2 - \Psi_1 > \frac{\pi_1 \Psi_2}{\pi_1 + \pi_0}$。此时，局部$IC$约束是紧的，这说明转移支付$\bar{t} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\pi_1 \Delta\pi}$。而且很明显的是因为$\pi_1 > \pi_0$，故$\Psi_2 > \frac{\pi_1 + \pi_0}{\pi_0} \Psi_1$。这是一个比任务互替性更强的约束，这时第一个任务完成后委托人就更难激励代理人取完成第二个任务。而且我们易得：

$$C_2^{SB} - C_1^{SB} = \frac{\pi_1}{\Delta\pi}\left(\Psi_2 - 2\Psi_1\right) \geq C_2^{FB} - C_1^{FB} = \Psi_2 - \Psi_1 \tag{7.43}$$

这意味着委托人比在完全信息情况下更少的激励两种努力！评价不完全信息下激励两种努力的可能性是否减少的关键在于第二优成本的增量$C_2^{SB} - C_1^{SB}$是否大于第一优成本的增量$C_2^{SB} - C_1^{SB}$。此时局部IC约束是紧的，由于任务之间的强互替性，故当在一项任务上实施努力后，在第二项任务上再激励努力

就变得更加困难。激励努力的第二优成本比第一优成本增加的更快，所以委托人更少愿意激励两种努力。

现在我们来看$\frac{\pi_0}{\pi_1+\pi_0}\Psi_2 < \Psi_1 < \frac{\Psi_2}{2}$下的情形。显然此时任务之间呈现的是弱的互替性，全局IC约束对于想从代理人那里激励两种努力的委托人来说更加严格，转移支付$\bar{t} = \frac{\Psi_2}{(\pi_1+\pi_0)\Delta\pi}$。$\frac{\pi_0\Psi_2}{\pi_1+\pi_0} < \Psi_1$意味着下式成立：

$$C_2^{SB} - C_1^{SB} = \frac{\pi_1\left(\pi_1\Psi_2 - (\pi_1+\pi_0)\Psi_1\right)}{(\pi_1+\pi_0)\Delta\pi} < C_2^{FB} - C_1^{FB} = \Psi_2 - \Psi_1 \quad (7.44)$$

现在委托人要比在完全信息下偏好于激励两种努力而非一种！这是因为当从一项任务上转到两项任务上时，激励努力的第二优成本增量小于第一优的成本增量。直观上来说，激励在不同任务之间造成了一定的互补性，而这却导致了技术性的规模经济。所以我们可以说，在道德风险下，互替任务之间的规模非经济程度增加还是减少，取决于局部IC约束还是全局IC约束哪一个是紧的。

最后我们再来看任务是互补时的情形。由于不等式$\Psi_1 > \frac{\pi_0\Psi_2}{\pi_1+\pi_0}$在$\Psi_1 > \frac{\Psi_2}{2}$时总是成立的，所以对想要激励两种努力的委托人来说，全局IC约束总是紧的，故转移支付还是$\bar{t} = \frac{\Psi_2}{(\pi_1+\pi_0)\Delta\pi}$. 委托人会发现此时要比在完全信息下更难激励两种努力。

接下来我们来委托人如何设计最优合同。假设代理人是严格厌恶风险的，并且逆效用函数$h = u^{-1}$是二次的，即$h(u) = u + \frac{ru^2}{2}$。记代理人在不同转移支付下的效用水平为$\bar{u} = u(\bar{t})$、$\hat{u} = u(\hat{t})$和$\underline{u} = u(\underline{t})$。假设委托人想激励两种努力，那么她的问题就是：

$$\max_{\{\bar{u},\hat{u},\underline{u}\}} \pi_1^2\left(2\bar{s} - h(\bar{u})\right) + 2\pi_1(1-\pi_1)\left(\vec{s} + \underline{s} - h(\hat{u})\right) + (1-\pi_1)^2\left(2\underline{s} - h(\underline{u})\right)$$

$$s.t. \quad IC_1 : \pi_1^2\bar{u} + 2\pi_1(1-\pi_1)\hat{u} + (1-\pi_1)^2\underline{u} - \Psi_2$$

$$\geq \pi_1\pi_0\bar{u} + (\pi_1(1-\pi_0) + \pi_0(1-\pi_1))\hat{u} + (1-\pi_1)(1-\pi_0)\underline{u} - \Psi_1$$

$$IC_2 : \pi_1^2\bar{u} + 2\pi_1(1-\pi_1)\hat{u} + (1-\pi_1)^2\underline{u} - \Psi_2$$

$$\geq \pi_0^2\bar{u} + 2\pi_0(1-\pi_0)\hat{u} + (1-\pi_0)^2\underline{u}$$

$$IR : \pi_1^2\bar{u} + 2\pi_1(1-\pi_1)\hat{u} + (1-\pi_1)^2\underline{u} - \Psi_2 \geq 0$$

其中IC_1和IC_2分别为局部IC约束和全局IC约束。

通过构造一个拉格朗日函数，我们可以得到如下的定理：[1]

定理 7.5 *在委托人要激励两种努力的最优合同中，IR约束总是紧的，而IC约束满足:*

- *在任务是互替的情形下，即当$\Psi_2 > 2\Psi_1$时，局部IC约束是紧的。*
- *在任务是弱互补的情形下，即当$\frac{(\Delta\pi)^2 + 2\pi_1(1-\pi_1)}{(\Delta\pi)^2 + \pi_1(1-\pi_1)}\Psi_1 \leq \Psi_2 \leq 2\Psi_1$时，局部$IC$约束和全局$IC$约束都是紧的。*
- *在任务是强互补的情形下，即当$\Psi_2 \leq \frac{(\Delta\pi)^2 + 2\pi_1(1-\pi_1)}{(\Delta\pi)^2 + \pi_1(1-\pi_1)}\Psi_1$时，全局$IC$约束是紧的。*

下面我们分析委托人如何选择第二优的努力。显然只有在激励努力的成本小于委托人从这项努力中期望利益的增量时，她才会激励努力。在前面的分析中，我们知道：

$$C_1^{FB} = h(\Psi_1) = \Psi_1 + \frac{r\Psi_1^2}{2}$$

$$C_2^{FB} = h(\Psi_2) = \Psi_2 + \frac{r\Psi_2^2}{2}$$

$$C_1^{SB} = E\left(h\left(\tilde{u}^{SB}\right)\right) = \Psi_1 + \frac{r\Psi_1^2}{2} + \frac{r\Psi_1^2\pi_1(1-\pi_1)}{2(\Delta\pi)^2}$$

$$C_2^{SB} = E\left(h\left(\tilde{u}^{SB}\right)\right) = \Psi_2 + \frac{r\Psi_2^2}{2} + \frac{r(\Psi_2-\Psi_1)^2\pi_1(1-\pi_1)}{(\Delta\pi)^2}$$

[1] 证明可参考Laffont，2001。

对于两项不相关的任务来说就有：

$$C_2^{SB} = 2\Psi_1 + \frac{r\left(2\Psi_1\right)^2}{2} + \frac{r\Psi_1^2\pi_1\left(1-\pi_1\right)}{\left(\Delta\pi\right)^2} \tag{7.45}$$

其中第二优比第一优多的部分就是委托人在不对称信息下诱导代理人努力工作的额外成本。

显然当下式成立时：

$$\Delta\pi\Delta s \geq C_1^{SB} = C_1^{FB} + \frac{r\Psi_1^2\pi_1\left(1-\pi_1\right)}{2(\Delta\pi)^2} \tag{7.46}$$

委托人就会偏好于激励一种努力；而当下式成立时：

$$\Delta\pi\Delta s \geq C_2^{SB} - C_1^{SB} = C_2^{FB} - C_1^{FB} + \frac{r\pi_1\left(1-\pi_1\right)}{\left(\Delta\pi\right)^2}\left(\left(\Psi_2-\Psi_1\right)^2 - \Psi_1^2\right) \tag{7.47}$$

委托人就偏好于激励两种努力而非一种。

从中我们还可以看出，如果任务是互替的，会存在激励的非规模经济。当两项任务不相关时，激励两种努力的收益要满足：

$$\Delta\pi\Delta s \geq C_2^{FB} - C_1^{FB} + \frac{r\Psi_1^2\pi_1\left(1-\pi_1\right)}{\left(\Delta\pi\right)^2} \tag{7.48}$$

因为$\Psi_2 > 2\Psi_1$，显然这要小于任务是互替时的情形。

7.7 多项任务—不对称的任务

本节和上节的区别在于不同任务之间的收益和概率分布有所不同：在任务i上实施努力e_k^i以$\pi\left(e_k^i\right) = \pi_k^i$的概率得到收益$\bar{s}^i$和以$1-\pi_k^i$的概率得到收益$\underline{s}^i$，其中$k = 0,1$。而现在的合同是一个四维变量$\left(\bar{t},\hat{t}_1,\hat{t}_2,\underline{t}\right)$，其中都成功时支付工资$\bar{t}$，都不成功时支付$\underline{t}$，当结果$(\bar{s}^1,\underline{s}^2)$出现时支付工资$\hat{t}_1$，而当结果$(\underline{s}^1,\bar{s}^2)$出现时支付工资$\hat{t}_2$。当然$\hat{t}_1$可以不等于$\hat{t}_2$。这里我们令$\bar{u} = u\left(\bar{t}\right)$，$\hat{u}_1 = u\left(\hat{t}_1\right)$，$\hat{u}_2 = u\left(\hat{t}_2\right)$，$\underline{u} = u\left(\underline{t}\right)$。

如果委托人要在两项任务上都激励努力，则必须要满足：

$$\begin{aligned}
IC_1:&\pi_1^1\pi_1^2\bar{u}+\pi_1^1\left(1-\pi_1^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_1^1\right)\pi_1^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_1^1\right)\left(1-\pi_1^2\right)\underline{u}-\Psi_2\\
&\geq\pi_0^1\pi_1^2\bar{u}+\pi_0^1\left(1-\pi_1^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_0^1\right)\pi_1^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_0^1\right)\left(1-\pi_1^2\right)\underline{u}-\Psi_1\\
IC_2:&\pi_1^1\pi_1^2\bar{u}+\pi_1^1\left(1-\pi_1^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_1^1\right)\pi_1^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_1^1\right)\left(1-\pi_1^2\right)\underline{u}-\Psi_2\\
&\geq\pi_1^1\pi_0^2\bar{u}+\pi_1^1\left(1-\pi_0^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_1^1\right)\pi_0^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_1^1\right)\left(1-\pi_0^2\right)\underline{u}-\Psi_1\\
IC_3:&\pi_1^1\pi_1^2\bar{u}+\pi_1^1\left(1-\pi_1^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_1^1\right)\pi_1^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_1^1\right)\left(1-\pi_1^2\right)\underline{u}-\Psi_2\\
&\geq\pi_0^1\pi_0^2\bar{u}+\pi_0^1\left(1-\pi_0^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_0^1\right)\pi_0^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_0^1\right)\left(1-\pi_0^2\right)\underline{u}\\
IR:&\pi_1^1\pi_1^2\bar{u}+\pi_1^1\left(1-\pi_1^2\right)\hat{u}_1+\left(1-\pi_1^1\right)\pi_1^2\hat{u}_2+\left(1-\pi_1^1\right)\left(1-\pi_1^2\right)\underline{u}\geq\Psi_2
\end{aligned}$$

其中前两个是局部IC约束，第三个是全局IC约束。
那么委托人的问题就是：

$$\begin{aligned}
&\max_{\{\bar{u},\hat{u}_1,\hat{u}_2,\underline{u}\}}\pi_1^1\pi_1^2\left(\bar{s}^1+\bar{s}^2-h\left(\bar{u}\right)\right)+\pi_1^1\left(1-\pi_1^2\right)\left(\bar{s}^1+\underline{s}^2-h\left(\hat{u}_1\right)\right)\\
&\quad+\left(1-\pi_1^1\right)\pi_1^2\left(\underline{s}^1+\bar{s}^2-h\left(\hat{u}_2\right)\right)+\left(1-\pi_1^1\right)\left(1-\pi_1^2\right)\left(\underline{s}^1+\underline{s}^2-h\left(\underline{u}\right)\right)\\
&s.t.\quad IC_1,IC_3,IC_3,IR
\end{aligned}$$

同样我们有如下的定理[2]：

定理 7.6 当任务是互替时，两个局部IC约束和IR约束都是紧的，全局IC约束则是松弛的。

而且还可以计算此时实施两种努力的第二优成本C_2^{SB}：

$$C_2^{SB}=\underbrace{\Psi_2+\frac{r\Psi_2^2}{2}}_{\text{第一优成本}}+\underbrace{\frac{r\left(\Psi_2-\Psi_1\right)^2}{2}\left(\frac{\pi_1^1\left(1-\pi_1^1\right)}{\left(\Delta\pi^1\right)^2}+\frac{\pi_1^2\left(1-\pi_1^2\right)}{\left(\Delta\pi^2\right)^2}\right)}_{\text{激励成本}}\qquad(7.49)$$

其中$\Delta\pi^1=\pi_1^1-\pi_0^1$，$\Delta\pi^2=\pi_1^2-\pi_0^2$。

[2]证明见Laffont，2001。

这个第二优的成本有如下直观的解释：在完全信息下，诱导代理人在两项任务上努力工作的成本是$C_2^{FB} = \Psi_2 + \frac{r\Psi_2^2}{2}$，即式（7.49）中的第一项，而在道德风险下，每项任务可以通过当$\tilde{s}^i = \bar{s}$的时候以概率π_1^i给予奖励$\left(1-\pi_1^i\right)\frac{(\Psi_2-\Psi_1)^2}{\Delta\pi^i}$和当$\tilde{s}^i = \underline{s}$时以概率$1-\pi_1^i$施予惩罚$-\pi_1^i\frac{(\Psi_2-\Psi_1)^2}{\Delta\pi^i}$进行激励。由于每项任务上的成功和失败时独立的，在代理人的支付中激励两种独立风险的激励成本则增加了，这些成本由式（7.49）中的第二项表示。

7.8 多任务模型的应用

这里我们讨论的是一个风险中性的地主和一个厌恶风险的佃农之间的合同关系。佃农的两项任务分别是努力$e \in \{0,1\}$和投资$\tilde{I}$，产出$\bar{q}$实现的概率是$\pi\left(e,\tilde{I}\right)$，而且高投资会增大高产出的概率，即$\frac{\partial\pi\left(e,\tilde{I}\right)}{\partial\tilde{I}} > 0$。为了简化，我们假设投资$\tilde{I}$只取两个值：0和$I > 0$。由于佃农自己没有资金，投资需要贷款，记利率为$R$，那么他投资的成本是$I(1+R)$。如果投资对地主来说是不可观测的，那么她就要设计激励合同来间接地控制佃农的投资。

作为一个参照，我们先来看努力是可观测的情形。如果委托人想要激励代理人投资，那么要激励努力就要满足代理人的激励相容（IC）约束：

$$\begin{aligned} IC_1 : & \pi(1,I)\,u(\bar{t}-(1+R)I) + (1-\pi(1,I))\,u(\underline{t}-(1+R)I) - \Psi \\ \geq & \pi(0,I)\,u(\bar{t}-(1+R)I) + (1-\pi(0,I))\,u(\underline{t}-(1+R)I) \end{aligned}$$

同时还要满足代理人的个人理性约束（IR）：

$$IR : \pi(1,I)\,u(t-(1+R)I) + (1-\pi(1,I))\,u(t-(1+R)I) - \Psi \geq 0$$

因而委托人激励努力的最优合同问题就是：

$$\begin{aligned} & max_{\{\bar{t},\underline{t}\}}\pi(1,I)\,(\bar{q}-\bar{t}) + (1-\pi(1,I))\left(\underline{q}-\underline{t}\right) \\ s.t. \quad & IC_1\text{和}IR \end{aligned}$$

现在我们来看投资是不可观测的情形。假设委托人要激励投资，那么除了上面的那个激励相容约束外，还得附加两个激励相容约束：

$$\begin{aligned} IC_2 :&\pi(1,I)\,u(\bar{t}-(1+R)\,I)+(1-\pi(1,I))\,u(\underline{t}-(1+R)\,I)-\Psi \\ &\geq \pi(0,0)\,u(\bar{t})+(1-\pi(0,0))\,u(\underline{t}) \\ IC_3 :&\pi(1,I)\,u(\bar{t}-(1+R)\,I)+(1-\pi(1,I))\,u(\underline{t}-(1+R)\,I)-\Psi \\ &\geq \pi(1,0)\,u(\bar{t})+(1-\pi(1,0))\,u(\underline{t})-\Psi \end{aligned}$$

其中IC_2约束是防止代理人同时降低他的努力和投资，IC_3约束是在努力的条件下激励投资。

进一步我们假设：

$$\Delta\pi(I)=\pi(1,I)-\pi(0,I)>\pi(1,0)-\pi(0,0)=\Delta\pi(0) \tag{7.50}$$

这个假设保证了努力和投资之间是互补的，即当代理人实施努力后，投资对于高产出的概率有着更大的影响。在这个假设下，我们有如下的定理：

定理 7.7 *在投资下的最小成本激励合同在没有投资的情形下委托人不会激励代理人努力工作。*

由式（7.50）可知IC_2约束要比IC_2约束更严格，所以我们有：

$$\begin{aligned} u(\bar{t})-u(\underline{t}) <&u(\bar{t}-(1+R)\,I)-u(\underline{t}-(1+R)\,I) \\ =&\frac{\Psi}{\Delta\pi(I)} \\ <&\frac{\Psi}{\Delta\pi(0)} \end{aligned}$$

第一个不等式用到$u(\cdot)$的凹性和$\bar{t}>\underline{t}$，等式是因为IC_1约束紧的，第二个不等式用到了式（7.50）。当努力和投资都是不可观测的情形下，在努力和投资上可能会同时发生逃避现象。

最后我们来看一个简单的例子。代理人施加在两项任务上的努力水平分别用e_1，e_2来表示，其效用函数是CARA型，即$u(w,e_1,e_2) = \mathrm{e}^{-r(w-c(e_1,e_2))}$，其中努力的成本是$c(e_1,e_2) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \delta e_1 e_2$。而$\delta$可以理解为任务之间的替代度。代理人的保留工资是$\underline{w}$。两项任务上的产出分别是：

$$
\begin{aligned}
q_1 &= e_1 + \varepsilon_1 \\
q_2 &= e_2 + \varepsilon_2
\end{aligned}
$$

其中ε_i服从正态分布$N\left(0,\sigma_i^2\right)$且相互独立。委托人是风险中性的，提供一个线性激励合同：$w = a + b_1 q_1 + b_2 q_2$，把产出代入即是$w = a + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$。

代理人的激励相容约束就变成最大化他的确定性等价效用：

$$
a + b_1 e_1 + b_2 e_2 - \left(\frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \delta e_1 e_2\right) - \frac{1}{2} r b_1^2 \sigma_1^2 - \frac{1}{2} r b_2^2 \sigma_2^2 \tag{7.51}
$$

由一阶条件可得：

$$
\begin{aligned}
b_1 &= e_1 + \delta e_2 \\
b_2 &= e_2 + \delta e_2
\end{aligned}
$$

那么委托人的问题就是：

$$
\begin{aligned}
& \max_{\{a,b_1,b_2\}} E\left(q_1 + q_2 - w\right) \\
s.t.\quad & a + b_1 e_1 + b_2 e_2 - \left(\frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \delta e_1 e_2\right) - \frac{1}{2} r b_1^2 \sigma_1^2 - \frac{1}{2} r b_2^2 \sigma_2^2 \geq \underline{w} \\
& b_1 = e_1 + \delta e_2 \\
& b_2 = e_2 + \delta e_2
\end{aligned}
$$

我们可以利用$E(q_i) = e_i$和$E(w) = a + b_1 e_1 + b_2 e_2$来做替换，就可以得到如下简化的形式：

$$
\max_{\{e_1,e_2\}} e_1 + e_2 - \left(\frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \delta e_1 e_2\right) - \frac{1}{2} r \left(e_1 + \delta e_2\right)^2 \sigma_1^2 - \frac{1}{2} r \left(e_2 + \delta e_1\right)^2 \sigma_2^2
$$

一阶条件是：

$$1-e_1-\delta e_2-r\left(e_1+\delta e_2\right)\sigma_1^2-r\delta\left(e_2+\delta e_1\right)\sigma_2^2=0$$
$$1-e_2-\delta e_2-r\delta\left(e_1+\delta e_2\right)\sigma_1^2-r\left(e_2+\delta e_1\right)\sigma_2^2=0$$

这些又可以被写成：

$$1-b_1\left(1+r\sigma_1^2\right)-\delta b_2 r\sigma_2^2=0$$
$$1-b_2\left(1+r\sigma_2^2\right)-\delta b_1 r\sigma_1^2=0$$

解之可得：

$$b_1=\frac{1+(1-\delta)\,r\sigma_2^2}{\left(1+r\sigma_1^2\right)\left(1+r\sigma_2^2\right)-\delta^2r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}$$
$$b_2=\frac{1+(1-\delta)\,r\sigma_1^2}{\left(1+r\sigma_1^2\right)\left(1+r\sigma_2^2\right)-\delta^2r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

对此我们有一些说明。第一，当$\delta=0$的时候，即两项任务是不相关的，很明显结果退化成只有一项任务的情形。第二，当$\delta\to 1$，即两项任务接近于完全替代时，不管产出波动有多大，我们都有$b_1\simeq b_2$。这个结果说来也许让你震惊。比如说$\sigma_1=0$，$\sigma_2=\infty$，易得$b_1=b_2=0$。即使可以准确无误的衡量一项任务的业绩，但却不能给以正确的激励。直观的说明是：由于代理人是风险厌恶的，委托人最好不要对一些风险很大的任务给以计件工资，否则的话，代理人会就会转移自己的努力：从不容易被奖励的那种工作转移到容易被奖励的那种工作。

7.9 动态模型

在许多情况下，动态委托代理理论也被视为短期的道德风险问题。与静态的道德风险问题相比较，其有两个重要的显著特征。

首先，与静态情况一样，代理人在时期t收到的激励性工资取决于努力程度及他无法控制的环境噪音，因而对其而言收入流量是不确定的。对于一个

普通消费者来说，当其效用函数为凹且得到的收入是一随机变量时，他会希望依靠信贷使其消费支出平滑化。从而在代理人能进入信贷市场的条件不适宜用来研究短期道德风险问题。

其次，道德风险问题的重复性会提供许多内在的信息，其中大多数是关于代理人的。道德风险发生在早期，至于具体在哪一日期则依赖于代理人的行动。当也存在短期的逆向选择问题时，动态的道德风险问题就变得复杂了。如果在某一环境下，无论从技术与偏好程度来说，代理人都更倾向签订长期合同，而不是在每期开始时签订短期合同，则这一环境因素就会对理论与实践方面的问题产生影响。

在动态模型中，考虑的主要有以下几个问题：长期委托一代理关系是否可以提高效率；何时短期合同的表现才能和长期合同一样；在代理人采取行动之后但在自然的不确定性被揭示之前，这其中的重新谈判有什么影响？

在动态环境下对于代理人的跨期偏好有以下两种标准的方法：一是时间平均，即$U = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(u\left(w_t\right)-\psi\left(a_t\right)\right)$，其中$a_t$是代理人在$t$期的行动，$w_t$是该期的工资水平，它是产出$x^t \equiv \{x_1, \cdots, x_t\}$的函数，$x_t$是$t$期的产出。二是折现法，即$U = (1-\delta)\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}\left(u\left(w_t\right)-\psi\left(a_t\right)\right)$。Radner（1985）证明，当$T \to \infty$时基本可以达到第一优，这是因为委托人可以观测到以往的产出水平，从而可以足够严重地惩罚代理人的不诚实行为。Fudenberg，Holmstrom和Milgrom（1990）以及Fudenberg，Levin和Maskin（1994）证明，当$T \to 1$时基本上也可以达到第一优。Abreu，Milgrom和Pearce（1991）研究了重复合伙制问题，其中局中人根据以往的产出水平实行触发战略。本节我们逐次来讨论这些问题。

7.9.1 努力水平的重新谈判（renegotiation）

Fudenberg与Tirole（1990）阐述了即使单期的道德风险问题也会有动态的一面。他们先从一个简单的代理问题开始，考察了最优合同的重新

谈判问题。假定技术为$x = a + \varepsilon$，这里ε 是均值为0 的可观测的环境噪音。在最优点时，委托人提供激励工资$w^*(x)$，代理人的最优努力水平为a^*并得到由$w^*(a^* + \varepsilon)$给出的一个随机性的工资，而委托人则获得剩余$a^* + \varepsilon - w^*(a^* + \varepsilon)$。

我们知道激励工资w^* 来自于激励与保险的权衡。现在我们考察在某一时刻，代理人付出了努力a^*，但当时观测不到产出x。于是工资w^* 对代理人提供激励，仅有保险因素起作用。但如果我们认为通常委托人是风险中性的而代理人是风险规避的，函数w^*的风险分担特性不再是最优的，此时固定工资是最优的，以使委托人对代理人提供完全保险，以避免环境噪音引起的风险的干扰。这一论断表明，一旦代理人付出努力a^*，合同双方将对完全保险的合同进行重新谈判，以将所有风险转嫁给委托人。因而最优合同在再谈判时不再是稳健的。显然，如果代理人希望在他付出努力后，他的工资方案能重新谈判以保持工资恒定，他会选择成本最小的行动方式，合同w^*不再提供任何激励作用。

于是在允许重新谈判时，委托人必须考虑怎样防止重新谈判，以及怎样消除重新谈判或潜在重新谈判的成本。当行动选择与观测到产出的时间间隔很长时，这一问题变得更突出，委托人与代理人会陷入双边垄断的境地。但是，如果这种重新谈判是可能的话，在委托人设计最优合同时就必须加以考虑。

首先我们来考虑最简单的情形。此时的行动仅有两个值：$a = H$与$a = L$，此时代理人的效用水平分别是$U(w, H) = u(w) - \psi$，$U(w, L) = u(w)$，产出水平可能是$\{\overline{x}, \underline{x}\}$，高努力水平相应的概率是$\{p, 1-p\}$，低努力相应的概率是$\{q, 1-q\}$，其中$p > q$。那么委托人的问题可以写成

$$\max V(w, \mu) = \mu \left[p\overline{w}_H + (1-p)\underline{w}_H\right] + (1-\mu)\left[q\overline{w}_L + (1-q)\underline{w}_L\right]$$

其中μ是代理人选择高努力水平的概率。分别记$\overline{\mu}_H = u(\overline{w}_H), \underline{\mu}_H = u(\underline{w}_H), \overline{\mu}_L = u(\overline{w}_L), \underline{\mu}_L = u(\underline{w}_L)$，$h(\cdot) = u^{-1}(\cdot)$，那么委托人的问题可以重新写为

$$\begin{aligned}
&\max_{w} -\mu\left[ph(\overline{\mu}_H) + (1-p)h\left(\underline{\mu}_H\right)\right] - (1-\mu)\left[qh(\overline{\mu}_L) + (1-q)h\left(\underline{\mu}_L\right)\right] \\
&s.t. \quad q\overline{\mu}_L + (1-q)\underline{\mu}_L \geq q\overline{\mu}_H + q\underline{\mu}_H \\
&\qquad\;\; p\overline{\mu}_H + (1-p)\underline{\mu}_H \geq \overline{\mu}
\end{aligned}$$

记两个约束条件的拉哥朗日乘子分别是γ和λ，那么我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\mu p h'(\overline{\mu}_H) = p\lambda - q\gamma \\
&\mu(1-p)h'\left(\underline{\mu}_H\right) = (1-p)\lambda - (1-q)\gamma \\
&(1-\mu)h'(\overline{\mu}_L) = \gamma \\
&(1-\mu)h'\left(\underline{\mu}_L\right) = \gamma
\end{aligned}$$

显然可以看出$\overline{\mu}_L = \underline{\mu}_L = \mu_L$，这说低努力水平的代理人获得了完全保险。

由$\gamma = (1-\mu)h'(\mu_L)$可得

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{h'(\mu_L)}{h'(\overline{\mu}_H) - h'\left(\underline{\mu}_H\right)} \cdot \frac{p-q}{p(1-p)}$$

从而知道$\mu^*(u)$是唯一的。故我们有如下定理：

定理 7.8 如果委托人允许重新谈判，那么在任意一个精练贝叶斯均衡里，代理人除非选择最低的努力水平，否则都不可能是一个纯战略均衡。

对于最优事前合同而言，则要求

$$\begin{aligned}
&\max_{(\overline{\mu}_H, \underline{\mu}_H, \mu_L)} \mu\left[p(\overline{x} - h(\overline{\mu}_H)) + (1-p)\left(\underline{x} - h\left(\underline{\mu}_H\right)\right)\right] \\
&\qquad + (1-\mu)\left[q(\overline{x} - h(\mu_L)) + (1-q)(\underline{x} - h(\mu_L))\right] \\
&s.t. \quad \mu_L = p\overline{\mu}_H + (1-p)\underline{\mu}_H - \psi \\
&\qquad\;\; \mu_L \geq 0
\end{aligned}$$

从中可以得到当$\mu \to 1$时，$\overline{\mu}_H \approx \underline{\mu}_H = \mu_H$。

7.9.2 无限期重复的道德风险

当委托人和代理人之间的这种事后谈判无限期重复时，产生了统计推理的经典问题：委托人试图通过观测产出x来推断行动a。因而可利用大数定律：如果委托人与代理人的关系是无限期重复的，委托人会观测到大量的产出数据，因而他有能力精确地推断出代理人的行动，如果代理人没有选择最优的行动时就将面临强有力的惩罚。在这一限制中，代理人会采取最佳行动. Rubinstein与Yaari（1983）证明：当委托人与代理人都没有当期的选择权时，这一直观判断是正确的。假定每一期t中技术是线性的

$$x_t = a + \varepsilon_t$$

这里，ε_t 是独立同分布的随机因素，均值为0，方差为σ^2。令a^* 为此时的最优行动。如果代理人在每期选择a^*，按照大数定律，当t趋于无穷时，平均值

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(x_i - a^*)$$

将趋于0。如果平均值的绝对值高于某些正的值，这意味着代理人经常偏离第一优行动，此时为诱导代理人每一期都选择第一优行动a^*，委托人可以惩罚代理人。此时的难点在于怎样选择这些正的值：以便利用大数定律，当t趋于无穷时此值应趋向于0 ，但它也不应衰减得太快，否则代理人会经常受到惩罚，这对于风险分担不利。

解决这一问题的适当工具是重复对数定律，这一定律限制了对大数定律的大幅度偏离。令λ 为大于1 的任意实数, 并令

$$\delta_t = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i\right)/t}{\sqrt{\left(2\lambda\sigma^2 \ln\ln t\right)/t}}$$

于是重复对数定律可表述为：

$$\Pr\left(\lim_{t\to\infty}\sup\delta_t < 1\right) = 1$$

这一策略在于选择$\lambda > 1$，并且如果

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(x_i - a^*) > \sqrt{\frac{2\lambda\sigma^2 \ln\ln t}{t}}$$

就将在t时期惩罚代理人。如果惩罚是严厉的且博弈持续无穷期，上述的行动是最优的。如果代理人在每期确实选择了a^*，他受到惩罚的概率是零。这一结论是建立在两个关键的假设基础上的：即两者的相互关系持续无限期且双方都有足够的耐心。

如果委托人与代理人的相互关系只持续有限期，上述的论断就完全失效，且上述的第一优结果就变成第二优的了。下面我们对此加以论证。

7.9.3 有限期重复的道德风险

假定委托人与代理人的相互关系持续T期。假定委托人的效用函数为

$$\sum_{i=1}^{T}\delta^{i-1}(x_i - w_i)$$

代理人的效用函数为

$$\sum_{i=1}^{T}\delta^{i-1}(u(c_i) - a_i)$$

其中c_i 是代理人在i期的消费额，δ 是共同的贴现因子。值得注意的是，如果代理人能进入信贷市场的话，工资与消费额不一定相等。

假定i期的产出只取决于该期采取的行动. 例如，由于只有代理人能观测到上一期的行动a_{i-1}，那么如果i期的产出也取决于上一期行动的话，在i期开始时代理人相对于委托人而言就有信息优势，这是因为他对i 的技术有更多的认识。

Chiappori-Macho-Rey-Salanié（1994）证明，对于通过点合同来执行的第一优的长期合同而言，需要两个条件：第一，长期第一优必须是可以经受重新谈判检验的；第二，点合同必须能有效地促使消费曲线平滑化。代理人是否可进入信贷市场对这两个先决条件产生影响。

7.9.4 不能获得信贷的情况

如果代理人不能进入信贷市场，委托人是否可以人为地使代理人的收入均衡化，以便更好地权衡激励与保险呢? Malcomson与Spinnewyn（1988）证明，如果有效的合同不要求委托人与代理人承诺长期合作的话，前期签订的短暂合同不能促进激励与保险之间的权衡。

然而按照Sappington（1983）提出的理由，法庭不会对代理人施以严厉的惩罚。以雇用关系为例，雇主对雇员的惩罚程度显然受环境的影响。

为解决这一问题，委托人可以运用长期合同来惩罚代理人，即如果代理人在某一期的产出较低的话，就在随后的数期支付较低的工资。因而一旦委托人承诺：当代理人提供高产出时就维持既定的工资，就对未来的优良绩效提供了保证，也即签订了合同。但是有限的可行性也允许代理人在收到某些惩罚性的低工资时废弃长期合同。因而，如果惩罚意味着代理人得到的工资不低于单期合同的最低可行工资时，对工资的限制不会改变上述结论。

当然，即使没有道德风险，不确定性的最优消费路径也显示出一定的记忆性，此时，如果代理人的效用函数严格为凹且对时间是可分的，他将平滑化自己各期的消费。这就带来了一个问题，Rogerson（1985）的记忆性结果究竟仅由消费的平滑化引起（即使此时没有道德风险），还是也由改善了道德风险时的激励效率而引起？

由于不要求代理人立即消费所有的工资，Malcomson与Spinnewyn（1988）证明，只要短期合同与长期合同一样有效，这种记忆性结果实际上仅由平滑化的消费的效率而引起，并非起因于改善了保险与激励的均衡比重。最优的短期合同只需了解代理人的财富，而不需了解更多的关于前期产出的信息。此外，代理人的财富究竟来自上期的合同，还是来自诸如继承之类的其他渠道？其实这是无关紧要的。因为记忆性结果仅产生于纯财富效应。

Rey与Salanie（1987）也阐明了短期合同与长期合同的等价性。然而在他

们简单的两期模型中，如果第二期的工资取决于第一期产出的话，代理人将尽可能地储蓄。关键原因是：代理人是风险厌恶的。他们利用了Jensen不等式来证明这一点。这一模型也出现在Chiappori-Macho-Rey-Salanié（1994）的研讨性论文中。在他们的模型中，代理人不能储蓄与借贷，因而在任一期中，其消费与所得工资是相等的。动态原理的直接应用表明，完全的承诺与本模型中的长期承诺是一致的：在签订合同时，委托人对代理人的特征有完整的了解，因而委托人能选择工资方案的最优顺序，且在得到新的信息时不需要重新调整。由于代理人的效用函数为凹，他希望在各期间的消费能平滑化。如果由于时期i出现的明显的干扰因素导致产出x_i 特别高，委托人会将这一干扰因素分摊到各期，以平滑化代理人各期的消费。他将通过提高将来各期付给代理人的工资来做到这一点。因而任一时期i 支付的工资不仅取决于当期的产出x_i，而且取决于过去各期的产出。这种特性被Rogerson（1985）称为记忆效应[3]。因而这一记忆效果是委托人在完全承诺的第一优合同中需要平滑化代理人消费的直接结果。在缺乏承诺时，委托人不能将i 期随机因素的影响分摊到各期。故该期的工资仅取决于当期的产出x_t，因而点合同的最优顺序是无记忆性的。这显然也包含了明显的效率损失。

令$T = 2$，有限产出集为$X \equiv \{x_1, \cdots, x_N\}$，相应的概率是$f(x_i, a) > 0$，两期工资方案是$w \equiv \{w_1(x_i), w_2(x_i, x_j)\}$，给定这样的工资结构，代理人的跨期最优战略是$a = \{a_1, a_2(\cdot)\}$。假设共同的贴现因子是$\delta = \frac{1}{1+r}$，那么代理人的效用水平是$U = u(w_1) - \psi(a_1) + \delta[u(w_2) - \psi(a_2)]$，离散情况下的委托

[3]Lambert（1983）与Rogerson（1985）通过分析当工资全部用于即期消费时的代理人工资情况，考虑了有限期委托-代理模型中帕累托有效的消费路径的特征。他们的中心论点是："在每一份帕累托第一优合同中，记忆性扮演了重要角色"（Rogerson），在这一意义上，"代理人的工资取决于他在该期及前面各期的表现"（Lambert）。

人的问题可以表示成

$$\max_{w}\sum_{i=1}^{N}f\left(x_i,a_1\right)\left\{\left[x_i-w_1\left(x_i\right)\right]+\delta\sum_{i=1}^{N}f\left(x_j,a_2\left(x_j\right)\right)\left[x_j-w_2\left(x_i,x_j\right)\right]\right\}$$

使用反证法我们可以这么以下两个定理：

定理 7.9 如果(a,w)是最优的，那么对于所有$j\in\{1,\cdots,N\}$，w必须满足这样性质，

$$\frac{1}{u'\left(w_1\left(x_j\right)\right)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{f\left(x_k,a_2\left(x_j\right)\right)}{u'\left(w_2\left(x_j,x_k\right)\right)}$$

定理 7.10 假设$w_1\left(x_i\right)\neq w_1\left(x_j\right)$并且基于第一阶段产出的第二阶段最优努力水平是唯一的，那么存在一个$k\in\{1,\cdots,N\}$使得$w_2\left(x_i,x_k\right)\neq w_2\left(x_j,x_k\right)$成立。

由于委托人和代理人之间的跨期边际替代率应该相等，所以合同具有记忆性。

类似地，对于连续型的产出水平，委托人的问题则变为：

$$\begin{aligned}
&\max_{w_1(x_1),w_2(x_1,x_2)}\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\left(x_1-w_1\left(x_1\right)\right)f\left(x_1,a_1\right)dx_1\\
&\quad+\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\left(x_2-w_2\left(x_1,x_2\right)\right)f\left(x_1,a_1\right)f\left(x_2,a_2\right)dx_1dx_2\\
s.t.\quad&\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\left(u\left(w_1\left(x_1\right)\right)+\delta u\left(w_2\left(x_1,x_2\right)\right)\right)f_a\left(x_1,a_1\right)f\left(x_2,a_2\right)dx_1dx_2-\psi'\left(a_1\right)=0\\
&\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}u\left(w_2\left(x_1,x_2\right)\right)f_a\left(x_1,a_2\right)dx_2-\psi'\left(a_2\right)=0\\
&\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}u\left(w_1\left(x_1\right)\right)f\left(x_1,a_1\right)dx_1-\psi\left(a_1\right)+\\
&\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\delta u\left(w_2\left(x_1,x_2\right)\right)f\left(x_1,a_1\right)f\left(x_2,a_2\right)dx_1dx_2-\psi\left(a_2\right)\geq 0
\end{aligned}$$

记其中三个约束条件的拉哥朗日乘子分别为μ_1, μ_2和λ，那么我们可以得到

$$\forall x_1, \frac{1}{u'\left(w_1\left(x_1\right)\right)} = \lambda + \mu_1 \frac{f_a\left(x_1, a_1\right)}{f\left(x_1, a_1\right)}$$
$$\forall\left(x_1, x_2\right), \frac{1}{u'\left(w_2\left(x_1, x_2\right)\right)} = \lambda + \mu_1 \frac{f_a\left(x_1, a_1\right)}{f\left(x_1, a_1\right)} + \mu_2\left(x_1\right) \frac{f_a\left(x_2, a_2\right)}{f\left(x_2, a_2\right)}$$

由此二式可得

$$\frac{1}{u'\left(w_2\left(x_1, x_2\right)\right)} = \frac{1}{u'\left(w_1\left(x_1\right)\right)} + \mu_2\left(x_1\right) \frac{f_a\left(x_2, a_2\right)}{f\left(x_2, a_2\right)}$$

因为$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} f_a\left(x_2, a_2\right) dx_2 = 0$，所以可以得到$E\left(\frac{1}{u'(w_2)}\right) = E\left(\frac{1}{u'(w_1)}\right)$。

从而以上论断引起了对“受限通路”情况的疑问：很难想像委托人如何对代理人的储蓄情况进行限制。这类似于发展中国家的佃农只生产高价值作物的情况，或类似于在劳动合同中仅以非货币作为奖赏的情况。但更通常说，自由进出信贷市场更令人感兴趣。

7.9.5 自由进出信贷市场

假定第一期结束时，委托人无法观测到代理人的消费与储蓄情况[4]。

令s_{T-1}表示代理人在$(T-1)$期的储蓄情况（这取决于合作的整个历史），$r = 1/\delta - 1$为市场利率。于是，代理人在T期的效用函数可用代理人从委托人处得到的工资函数来表示。即

$$U(w_T; s_{T-1}) = u(w_T + (1+r)s_{T-1})$$

这取决于其过去的储蓄s_{T-1}。

由于逆向选择问题与道德风险问题同时出现[5]，这一完全最优的承诺是不必重新谈判的。Chiappori-Macho-Rey-Salanié（1994）证明了下列重要结

[4]在第二期，代理人的财富是其私人信息。实际上，储蓄的不可观测性引发了逆向选择问题。

[5]CARA 效用就成为一个特例，因其没有财富效应，也就排除了逆向选择问题。Fudenberg，Holmstrom 与Milgrom（1990）对此进行了讨论。

论：如果长期最优中仅包括纯策略，则从第二期开始仅可采用成本最小化的方案。为说明这点，假定$T = 2$ 并运用上述的同一符号，当第一期的产出为j及其最优行动为a_0时，另以s_j 表示储蓄。现在假设在第一期的产出为i后，第二期的最优合同采用a_i。如果a_i 不是成本最小化的行动[6]，于是至少有一个第二期的激励相容条件必须是紧的：存在一个a' 从而

$$\sum_j p_j\left(a_i\right) u\left(w_{ij}+\frac{s_i}{\delta}\right)-a_i=\sum_j p_j\left(a'\right) u\left(w_{ij}+\frac{s_i}{\delta}\right)-a'$$

令s' 为代理人选择a'时的最优储蓄，也即：

$$s'=\arg\max_x u\left(w_i-s\right)+\delta\left(\sum_j p_j\left(a'\right) u\left(w_{ij}+\frac{s_i}{\delta}\right)-a'\right)$$

现在假设代理人对于最优合同(w_i, w_{ij}) 的反应不是(a_0, s_i, a_i)，而是(a'_0, s'_i, a'_i)。这里除非$s_i = s'_i$ 与$a_i = a'_i$出现，$a'_0 \neq a_0$。这可以提高代理人的期望效用水平。

$$\begin{aligned}
&\sum_j p_j\left(a_0\right)\left(u\left(w_{ij}-s_j\right)-a_0+\sum_k p_k\left(a_j\right) u\left(w_{jk}+\frac{s_i}{\delta}\right)-a_j\right)\\
=&\sum_j p_j\left(a'_0\right)\left(u\left(w_{ij}-s_j\right)-a'_0+\sum_k p_k\left(a'_j\right) u\left(w_{jk}+\frac{s_i}{\delta}\right)-a'_j\right)\\
<&\sum_j p_j\left(a'_0\right)\left(u\left(w_{ij}-s'_j\right)-a'_0+\sum_k p_k\left(a'_j\right) u\left(w_{jk}+\frac{s_i}{\delta}\right)-a'_j\right)
\end{aligned}$$

这一不等式表明，（由定义可知：一般地，给定行动a'_i时，s'_j 是比s_j 更好的选择。）代理人下期要采取的行动会影响其该期的储蓄。由于这一不等式不符合了第一期的激励相容约束条件，a_i 不是成本最小化行动的这一前提就是错误的，这就完成了证明过程。从证明中我们可看出，当代理人可进入信贷市场时，逆向选择问题确实出现了，并更易于处理。要做到这点，要满足两

[6]可以证明这是前后矛盾的。

点条件：首先，事后 效率要求第二期开始时的激励相容条件必须紧；其次，储蓄水平必须随代理人准备选取的努力水平而变动。直观地看，当工资是基于以前的产出时，代理人会在今天储蓄更多以在明天得到更多的享受并或抵御可能遇到的不利变化的冲击。

7.9.6 动态最优激励合同的线性

在静态模型中我们曾经涉及到线性合同的问题，在动态模型中同样有类似的问题。简单线性合同可能劣于步进式合同。Holmstrom与Milgrom（1987）对古典的代理模型重新作了解释，以挽救线性合同。在他们的模型中，与单一行动影响单一产出的观点不同的是，他们认为一系列的行动影响了相应的一系列的产出。在各期之间没有联系[7]，在选择下一期的行动之前，过去的产出都可以观测到。古典模型中的产出x 可解释为在序贯行动模型中一年的产出集合，即$x = \sum_i x_i$。

Holmtrom与Milgrom提醒我们，线性合同在动态模型中是很稳健的。直观地看，一旦代理人当天的总产出超过了动态模型设置的标准y_0时，Mirrlees设计的步进式合同就不能引诱最优努力水平。通常而言，如果当年的激励合同是年末总产出的非线性函数的话，工人每天的努力程度都会随当天的总产出而变化，而每天的产出很难与委托人希望的完全一致。

Holmstrom与Milgrom（1987）最早考察了一个激励合同持续T期的多期模型。代理人最低的确定性等价工资标准化为0 ，并由委托人提供担保。于

[7]因而产出是连续不相关的，或者换句话说，在不同时期采取的行动是独立的。

是问题变为

$$\max_{\{p^t\},s} E\left\{v\left(\sum_{t=1}^{T}\pi^t - s\left(X^T\right)\right)\right\}$$

$$s.t. \left\{p^t\right\} \in \arg\max E\left\{u\left(s\left(X^T\right) - \sum_{t=1}^{T} c\left(p^t\left(X^{T-1}\right);\theta^t\right)\right)\right\}$$

$$E\left\{u\left(s\left(X^T\right) - \sum_{t=1}^{T} c\left(p^t\left(X^{T-1}\right);\theta^t\right)\right)\right\} \geq u\left(0\right)$$

其中，π 为总利润，x 是产出，v 是委托人的效用函数，p^t 是代理人选择的努力水平且影响自然状态分布。$\left\{p^t(X^{T-1})\right\}$ 是称为策略的随机过程。效用函数是指数函数的形式。

应用动态规划解决这一问题，首先固定工资方案$s(X^T)$ 并定义价值函数

$$V_t = E\left\{u\left[s\left(X^T - \sum_{t=1}^{T} c\left(p^t\left(X^{T-1}\right);\theta^t\right)\right)\right]|X^t\right\}$$

他们证明了关于线性激励合同的下列结论：

定理 7.11 最优工资方案为

$$s\left(X^T\right) = \sum_{t=1}^{T} s\left(X^t; p^*\right) = s\left(p^*\right) \cdot A^T$$

这里，p^* 是任意单期的最优值，A^T 表示向量$\left(A_1^t, \cdots, A_M^t\right)$，$A_i^t$ 是在首先的t期中出现第i种结果的期数。

本证明使用的是归纳法。对于指数效用，该定理要重新定义p^* 与s^*。

工资是总产出的线性函数。在该定理中，多期环境中的最优工资方案取决于信息集合A^T，对代理人的所有战略而言这一信息集合不是一个充分统计量，但对这一阶段的偏离而言则是充分的统计量，并可以据以制订最优工资方案。

但是他们强调，定理7.11并没表明最优方案对利润必须是线性的。不过有一个特例，即两种产出导致两种不同的利润水平。

在讨论连续模型前，对上述结论有一下几点需要说明。第一，在得出这些结论时需要一些充分条件：指数效用函数，及与历史与时间独立的技术。这确保了委托人在T个单期时遇到的问题是一样的，因而得到的结论也是一样的；其次，这里没有考虑信贷的可获得性及贴现率；最后，在这一公式中信息的先后顺序是非常关键的。

Holmstrom与Milgrom进一步分析了连续模型的线性性质。考虑如下的布朗运动：$dZ = \mu dt + dB$。其中，代理人控制漂移率μ，B 是固定的N-维向量，布朗运动的协方差矩阵为Σ。我们有如下定理：

定理 7.12 仅当下式成立时:

$$\begin{aligned} s\left(Z^1\right) =& w + \int_0^1 c\left(\mu\left(t\right)\right) dt + \left\{\int_0^1 c'\left(\mu\left(t\right)\right)^T dt - \int_0^1 c'\left(\mu\left(t\right)\right)^T \mu\left(t\right) dt\right\} \\ &+ \frac{r}{2}\int_0^1 c'\left(\mu\left(t\right)\right)^T \sum c\left(\mu\left(t\right)\right) dt \end{aligned}$$

随机过程$\{\mu(t); 0 \le t \le 1\}$是可实施的，其确定性等价$w$。

为得到最优分担方案，相应地定义委托人的布朗问题，即委托人选择$\{\mu(t); 0 \le t \le 1\}$ 及s，采用这一方案会最大化委托人的总效用，其约束条件是代理人的确定性等价工资不小于零。于是我们有：

定理 7.13 假设$\mu^* \in M$ 是最大化委托人的确定性等价工资, 于是委托人布朗运动的最优解为将代理人的努力程度为μ^*，并设定

$$s\left(Z^1\right) = c\left(\mu^*\right) + c'\left(\mu^*\right)^T \left(Z\left(1\right) - \mu^*\right) + \frac{r}{2} c'\left(\mu^*\right)^T \sum c'\left(\mu^*\right)$$

该证明是从前面的定理推出的，它是指数函数的推论。因而代理人的工资相对于利润是线性的。再者，对于最优化与线性而言，时间顺序是关键的。

代理人信息顺序的少许改变都会推翻这一结论。如果我们假定代理人在选择努力程度前观测到对下一期的影响，产生任何特定的纯战略序列的单一分担方案不会带来最佳的产出。

除线性结论外，另一个主要的结论是，在最优激励合同中没必要总是使用所有 可得到的信息。这与全部财产有关，就好像最优激励方案与全部会计信息一起作用一样，因此将资源用于收集代理人努力程度的详细信息自然是无意义的。

Holmstrom与Milgrom（1987）认为，计算上的简便性使线性假设在方法上有了实际的价值。他们给出了一些例子。在团队生产中遇到的一个直观例子是相关的评价。假设除z外，委托人观测到另一个信号y，这可以是一个市场指数并可包含在合同中，于是直接的计算表明，如果存在相关性的话，对额外信号y 的观测等价于方差z 的减少。实际上，如果两者间完全相关，可得到最优产出，且一级最优合同可消除掉所有的不确定性。

第二个例子是努力程度的分配。假设代理人能将其努力程度在两个活动间分配，两个都为布朗运动。如果两者是独立的且委托人仅能观测到两者之和，代理人将对称地分配其努力程度。但如果两个活动的产出能分别观测到，最优方案仍是线性的，$s(z_1, z_2) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \beta$，但$\alpha_1$ 不必要等于α_2，实际上, 只有当z_1 与z_2 的方差相等时，两者才相等。作为一个例子，当代理人能将时间分配于降低成本与增加收入两方面，且这两种活动的效率相同时，如果收入增加的外生方差大于降低成本的方差，则激励方案不可只考虑利润因素；相对于增加收入而言，降低成本更应受到奖赏。

7.9.7 职业生涯规划

职业生涯规划是指到当前的业绩会影响到将来的工资。最优的激励合同应最大化总体的激励作用，是这种激励作用职业生涯规划产生的内生激励与工资产生的外生激励的结合。直观地说，对即将退休的代理人而言，最优工

资方案作用更大，而职业生涯规划的作用较弱。Fama（1980）最早注意到这种效应，并认为激励性合同不一定是必需的，因为经理们还受到企业家劳动力市场的约束。Holmstrom （1982，1999）证明，当没有合同时，代理人在职业生涯开始时会努力工作，而在以后年份就不那么努力了。Gibbons与Murphy （1992）从中推出了一个模型，并发现对于CEO工资与股票市场间关系的这一预言的经验性证据。在包含职业生涯规划的早期模型中，他们推导出了最大化总激励作用的最优合同。

假设代理人工作T 期。产出为

$$y_t = \eta + a_t + \epsilon_t$$

这里，$\eta \sim N(m_0, \sigma_0^2)$ 及$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$。代理人最大化考虑贴现时的$T$-期的总指数效用。假设合同是线性的$w_t(y_t) = c_t + b_t y_t$，这里$c_t$ 是两期模型中工资的固定部分，给定第一期的产出y_1，η的条件分布是正态的，使用贝叶斯公式，其均值为

$$m_1 = \frac{\sigma_\epsilon^2 m_0 + \sigma_0^2 (y_1 - \hat{a}_1)}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_0^2}$$

方差为

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2 \sigma_0^2}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_0^2}$$

给定效用为指数函数，使用二阶泰勒展开来最大化代理人的效用，可得

$$b_2 = \frac{1}{1 + r\left(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_0^2\right) g''\left(a_2^*\left(b_2\right)\right)}$$

这里$g(a)$ 是代理人的负效用函数。假设$g''' \geq 0$ b_2^* 随风险厌恶及不确定的增加而递减。

对于T-期模型, 以下的三个方程定义了劳动市场：

$$
\begin{aligned}
&c_t=(1-b_t)\,E\left\{y_t|y_1,\cdots,y_{t-1}\right\}\\
&E\left\{y_t|y_1,\cdots,y_{t-1}\right\}=m_{t-1}+\hat{a}_t\\
&m_{t-1}\left(y_1,\cdots,y_{t-1};\hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_{t-1}\right)=\frac{\sigma_\epsilon^2 m_0+\sigma_0^2\sum_{i=1}^{t-1}\left(y_i-\hat{a}_i\right)}{\sigma_\epsilon^2+(t-1)\,\sigma_0^2}
\end{aligned}
$$

第一个方程说明，由于雇主市场的竞争性，代理人得到了全部期望剩余。一阶条件产生

$$
\begin{aligned}
g'\left(a_t^*\right)=&b_t+\sum_{i=t+1}^{T}\delta^{t-1}\frac{\partial c_i}{\partial a_t}\\
=&b_t+\sum_{i=t+1}^{T}\delta^{t-1}\left(1-b_i\right)\frac{\sigma_0^2}{\sigma_\epsilon^2+(i-1)\,\sigma_0^2}
\end{aligned}
$$

通过解决与两期问题相似的一阶条件，得出了最优的单期合同的斜率$b_1^*(b_2,...,b_T)$：

$$
\begin{aligned}
b_1=&\frac{1}{1+r\left(\sigma_\epsilon^2+\sigma_0^2\right)g''\left(a_1^*\right)}-\sum_{t=2}^{T}\delta^{t-1}\left(1-b_t\right)\frac{\sigma_0^2}{\sigma_\epsilon^2+(t-1)\,\sigma_0^2}\\
&-\frac{r\sigma_0^2 g''\left(a_1^*\right)\sum_{t=2}^{T}\delta^{t-1}B_t}{1+r\left(\sigma_\epsilon^2+\sigma_0^2\right)g''\left(a_1^*\right)}
\end{aligned}
$$

代回原式可得开始于末期T的最优工资率$(b_1^*,...,b_T^*)$可以很容易地证明$b_t^*<b_{t+1}^*\ \forall\ t<T$。因此在最优激励合同中，合同的激励作用随$t$的增加而单调增加，因而对于行将退休者而言作用最强。

因而在他们的模型中，显性的激励可用以平衡基于合同与职业生涯规划产生的非期望的职业生涯规划与最优的总激励的影响。

Gibbons 与Murphy 发现了CEO们基于任期的职业生涯规划的进一步证据。他们的数据来自跟踪《执行官工资一览》所列举的CEO们，这本杂志由*Forbes*在1971-89 间出版，囊括了1970-99 财政年度在1493 家全国最大的公

司中就职的2972 名执行官。在这个完善的样本中，以1988年的美元价格为基准，CEO们的平均数均工资及奖金每年增加6.6%。最后，最优激励合同中性化了职业生涯规划的激励作用，也最大化了总激励作用，这种思想也可用于职位升迁的考察。

7.10 团队中的动态性

7.10.1 团队的声誉模型简介

本章开始涉及到简单的团队问题，Jeon（1996）则研究了团队中道德风险的声誉问题。这里要指出的两个问题是：团队中的代理人是群体的，团队产出要在代理人间分配。主要的结论是，在存在有经验的团队成员时，初级的团队成员会受益，团队的效率性与平均分配特性说明，团队常常忽视成员间能力上的显而易见的差别而进行平均分配。

在一个简单的有两个代理人及两期的动态多代理人模型中，可得到两个特征: 首先，由于“搭便车”问题，声誉在团队带来的激励作用较弱；其次，如果代理人对自己的能力不大了解或对其同伴的能力更了解，他的职业生涯规划就会增强。这些结论可直接应用贝叶斯统计推论的结果而得出。因而第一个结论是，由年轻人与年长者组成的迭代团队比仅由同一年龄段的人组成的团队更有效率。这一论断看起来似乎是老生常谈的言论，但Jeon 强调的是，年长者的价值在于作为年轻者的伙伴，而不在于传授知识与经验给年轻人，也不在于激励年轻人努力工作以修正委托人对于其能力的信念。

Jeon强调的另一个问题是产出分配方案。他建议应在团队中平均分配而不应考虑成员能力的差别。平均分配的优点是获得了团体的激励作用，即使此时平均分配不能改变两个代理人的声誉系数总和，但这就减少了差距，因此增加了两者努力带来的净产出之和。

7.10.2 同时存在逆向选择与道德风险的团队

McAfee与McMillan （1991）考察了当团队同时存在逆向选择与道德风险的情况，这儿的逆向选择指每个成员的能力仅其本人所知，道德风险指努力无法被观测到。他们认为支付方案应该相对于总产出是线性的。

在这一情况下，道德风险问题可彻底解决，委托人将团队边际产出的100% 支付给n 个代理人中的每一个。这给每个代理人以适当的激励并使之付出努力，但使得委托人支付的变动工资为产出变动的n倍。为进行平衡，固定费用部分必须为负，其等于产出的期望值减去代理人和生产成本。代理人平均得到零租金。现在将逆向选择[8]加入到模型中，代理人将得到信息租。委托人通过将边际支付降至100% 以下而得到信息租。当变动支付减少时，固定支付的负值在减少。当代理人能力的不确定性足够分散时，边际支付将变得很小，其总和会降至1 以下，固定费用将变成正值，从而这看起来更像是工资加佣金的传统支付方案。至于为什么委托人的支付少于全部的边际产出，其原因是委托人无法对高能力与低能力的代理人加以区分。McAfee与McMillan 证明，为了在既存在逆向选择又存在道德风险的团队中对代理人进行正确的激励，需满足两个条件，即，代理人i的努力程度随其他代理人自我声称的能力增加而增加，代理人在团队边际产出（如果支付方案取决于总产出的话）中的份额随他自己声称的能力增加而增加。通过这两个条件，他们证明了最优合同只取决于团队产出。其基本原理是在高估与低估其能力的可能性之间进行权衡，例如，低能力的代理人不愿意高估自己的能力，否则他就会面临一个对其努力水平相对敏感的支付函数。

令人惊奇的是，对于监控个人贡献与仅观测到总产出的两种情况，委托人感觉是无差异的，即在这中间没有“搭便车”现象。在本案例中显然没有逆向选择问题，因为非监控性的合同对每个人都支付了团队边际产出的100%。

[8]参照下一章

加入道德风险并不会改变这一均衡，因为代理人得到的租金是私人信息的结果，这完全由贡献函数决定，这一函数在监控性与非监控性合同中都会出现。

作者也承认，与本模型相反，团队中无疑存在内生的非效率因素，但他们的模型认为，团队问题的根源不在于团队成员的努力及能力的不可观测性。这一根源要在别处寻找，如团队成员的风险厌恶或相互间的合谋，但在其模型中没有对此作出假设。

7.10.3 棘轮效应与业绩比较

早期的研究（Holmstrom，1982和Mookherjee，1984）表明，可比较的业绩信息（comparable performance information ，CPI）能增进委托代理关系的激励作用与效率。在静态模型中我们知道，业绩比较可增进对努力程度估算的精确性，因而在设计对于风险厌恶型的代理人的激励措施时，能更有效地对保险与效率进行权衡。在动态模型中，即使存在显性激励，隐性激励（即棘轮效应）也是重要的。为阐明这点，先看一个两期模型。

先考察一个风险中性的代理人，两期的效用函数是$U = w_1 - C(e_1) + w_2 - C(e_2)$，$t$期的产出是$x_t = e_t + a + u_t$。其中$a$是代理人的时间不变性特征，即能力，$u_t$是短期的环境噪音。$e_t$是代理人选择的努力水平。

使用后向归纳法来解此问题，我们知道$e_2 = 0$。因而，$w_2 = E[x_2 \mid x_1] = E[a \mid x_1]$。最终结果是$w_2 = \tau(x_1 - \hat{e}_1)$，其中$\hat{e}_1$ 是劳动力市场推测的时期1 的努力水平，$\tau = \frac{Var(a)}{Var(a)+Var(u)}$。因而一阶条件表明，均衡的努力水平比一级最优时要低。

现在引进CPI，仍可得出$e_{2i}=0$，且w_{2i} 仍然等于对于a的条件期望。给定上述假设，变量a, x_{1i} 与x_{1j} 呈多元正态分布，且协方差矩阵与下式成比例：

$$\begin{pmatrix} \tau & \tau & \eta\tau \\ \tau & 1 & \kappa \\ \eta\tau & \kappa & 1 \end{pmatrix}$$

这里，$\eta = corr(a_i, a_j)$ ，$\rho = corr(u_{ti}, u_{tj})$，$\kappa = (1-\tau)\rho + \eta\tau$。用贝叶斯公式可得：

$$w_{2i} = E(a_i \mid x_{1i}, x_{1j}) = \frac{\tau}{1-\kappa^2}[(1-\eta\kappa)(x_{1i}-\hat{e}_{1i}) + (\eta-\kappa)(x_{1j}-\hat{e}_{1j})]$$

一阶条件

$$C'(e_{1i}) = \tau(\frac{1-\eta\kappa}{1-\kappa^2}) \equiv \Psi \leq 1$$

我们有如下结论：

定理 7.14 在管理者职业生涯规划模型中，当且仅当$\kappa(\eta-\rho)<0$时，有业绩比较下努力的激励作用及效率要高于没有业绩比较的情况。

证明：棘轮效应将在下列的显性激励与隐性激励模型中阐述。假设有一个委托人P和两个代理人A_k。任一厂商在$t=1,2$期的产出A_k，$k=i,j$为$x_{tk} = e_{tk} + a_k + u_{tk}$。这里

$$a_k \sim N(0, \tau\sigma^2), u_{tk} \sim N(0, (1-\tau)\sigma^2), \quad k = i, j.$$
$$corr(a_i, a_j) = \eta, \qquad corr(u_{ti}, u_{tj}) = \rho$$

因而

$$var(x_{tk}) = \sigma^2, \quad k = i, j.$$
$$var(x_{ti} \mid x_{tj}) = (1-\kappa^2)\sigma^2$$
$$var(x_{2i} \mid x_{1j}) = (1-\tau^2)\sigma^2$$
$$var(x_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j}, x_{2j}) = (1-\tau)(1+\gamma)(1-\rho^2)\sigma^2$$

这里

$$\gamma = \tau[1 + 2(1-\tau)\frac{N}{D}] \in [0,1]$$

且

$$N = (\rho - \eta)(\rho + \eta\tau)$$
$$D = (1-\rho^2)(1+\tau) + 2\tau N$$

在得出最优激励合同前要作两个假设：1、只有单期合同是可行的；2、单期合同采用线性形式$w_{ti} = \alpha_t + \beta_t x_{ti} + \epsilon_t x_{tj}$。

我们首先考虑静态模型中CPI的影响，在指数效用函数条件下的委托人最小化相对于第一优的福利损失，即

$$\begin{aligned} l &= 1/2[(1-\beta)^2 + r\mathrm{var}(\beta x_i + \epsilon x_j)] \\ &= 1/2[(1-\beta)^2 + r\sigma^2(\beta^2 + \epsilon^2 + 2\beta\epsilon\kappa)] \end{aligned}$$

于是β 的最优值由下式得出

$$\beta = \frac{1}{1 + r\sigma^2(1-\kappa^2)}$$

对任何给定的β，ϵ 的最优值会最小化的w_i的方差

$$\epsilon = -\beta[\frac{\mathrm{cov}(x_i, x_j)}{\mathrm{var}(x_j)}] = -\beta\kappa$$

因而很容易看出，基于两个代理人产出的工资方案下的福利损失减少了。这改进了对保险效应与激励效应的权衡：由于合同中存在CPI，委托人可以消除代理人能力或短期冲击方面的一些不确定因素，从而降低了对代理人提供激励时的风险成本。

现在来考虑两期模型。x_{2i} 的条件期望可写成如下形式

$$E(x_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j}, x_{2j}) = \hat{e}_{2i} + \gamma(x_{1i} - \hat{e}_{1i}) + \delta_1(x_{1j} - \hat{e}_{1i}) + \delta_2(x_{2j} - \hat{e}_{2j})$$

委托人选择ϵ_2 以最小化$\mathrm{var}(w_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j})$ 因而

$$\epsilon_2 = -\beta_2[\frac{\mathrm{cov}(x_{2i}, x_{2j} \mid x_{1j}, x_{1i})}{\mathrm{var}(x_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j})}] = -\beta_2\delta_2,$$

可得出

$$\begin{aligned} var(w_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j}) &= (\beta_2)^2\mathrm{var}(x_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j}, x_{2j}) \\ &= (\beta_2)^2(1-\tau)(1+\gamma)(1-\rho^2)\sigma^2, \end{aligned}$$

于是通过最小化委托人期望的福利损失，可得到第2 期最佳的努力程度的激励水平

$$\beta_2 = \frac{1}{1 + r\sigma^2(1-\tau)(1+\gamma)(1-\rho^2)}$$

通过构建代理人的确定性等价工资，得到$w_{1i} + w_{2i}$ 的方差，可得出委托人的福利损失函数为

$$\begin{aligned} l = 1/2\{(1-\widehat{\beta}_1)^2 + (1-\beta_2)^2 + r\sigma^2[(\widehat{\beta}_1 + \beta_2\gamma)^2(1-\kappa^2) \\ + (\beta_2)^2(1-\tau)(1+\gamma)(1-\rho^2)]\}. \end{aligned}$$

Meyer 与Vickers证明，如果引进讨价还价能力参数$b \in [0, 1]$ 给代理人，会产生声誉效应[9]，虽然b的变化改变了声誉效应的力量，但这种变化带来的福利影响可以无成本地为β_1与ϵ_1的适当改变所抵消，从而使得总福利不发生变化。因为当$\beta_2\gamma$ 改变时，β_1 的调整虽然可行，但成本高昂。

[9]通过恰当地构建代理人确定性等价工资，第二期的工资可写成

$$w_{2i} = 常数 + bE(a_i \mid x_{1i}, x_{1j}) + \beta_2[x_{2i} - E(x_{2i} \mid x_{1i}, x_{1j}, x_{2j})]$$

因而总工资$w_{1i} + w_{2i}$ 变为

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 =& \beta_1 + b\frac{\partial}{\partial x_{1i}}E\left(a_i|x_{1i}, x_{1j}\right) - \beta_2\frac{\partial}{\partial x_{1i}}E\left(x_{2i}|x_{1i}, x_{1j}, x_{2j}\right) \\ =& \beta_1 + b\Psi - \beta_2\gamma \end{aligned}$$

这里，因子$b\Psi$ 可视为讨价还价能力或者声誉效应，这是第一种类型的激励，$\beta_2\gamma$项表示棘轮效应，这是文献中记载的另一种有名的隐性激励。

因而通过引进序贯最优的显性合同及风险厌恶的代理人，声誉效应不再有多少意义：只有棘轮效应对代理人的努力水平与福利有所影响[10]。

最后，福利损失最小化得出了一个结论：棘轮效应越大，第一期提供激励的成本就越高，在总福利损失中第一期所占的份额就越多。

总而言之，在简要的职业生涯规划模型中，没有提供显性的激励，CPI 对激励产生影响时只通过隐性激励措施，特别是指声誉效应。通过代理人内在个性与影响其行为的短期环境噪音的相关性，CPI 可以提高或者降低效率。

在两期模型中，显性激励是可选择的变量，且合同是序贯最优的，当合同采取线性形式且代理人为风险厌恶型时，CPI 能显著增强棘轮效应，在本情况中[11]，CPI 在全部激励措施及福利中是唯一占优的。如果对代理人行为的短期冲击间的相关性与他们的内在性格不太相关，则CPI会减弱棘轮效应。但是，通过在显性激励合同中引进CPI，减弱棘轮效应所降低的成本可能会超过改善保险与激励所带来的好处。从而，如果委托人不能事先估计可在将来调整合同条款，则在将CPI 加入显性激励合同前必须评估CPI 对棘轮效应的影响。

过去二十年雇用关在一下两个方面有了很大进展：长期关系下的激励性工资及组织中的职业生涯规划。当涉及方案选择时，也讨论了其他一些具体的问题，包括工资方案，团队的分担与协作，线性方案的有效性，及激励性的工资。理论模型旨在解释与溶合经验性的发现，如激励合同的低效性，跨期递增的工资（有时指晋升），团队中不顾成员能力差异事实的平均分配现象，等等类似现象。许多模型在这些议题方面都有所收获。

许多理论都从常规的问题出发，并采用通常的假设。但是还需要解决一些基本的问题：代理人从事的具体工作是什么？代理人的能力是否随时间而实

---

[10]这在开始时的纯隐性CPI 激励合同中有所讨论，在一定的条件下，声誉效应或职业生涯规划会增进激励作用及福利状况。

[11]当可以设计显性激励合同时。

际性地增长？劳动力市场是怎样影响代理人的激励因素的（而不是仅仅关注公司内部运作）？如果这些领域能认真加以研讨的话，我们就能对最优的劳动合同有更深的认识。

7.11 一阶方法（FOA）的有效性

在前面的章节里，我们大量用到了一阶方法，但是有时这种方法是不适用的。本节我们讨论这种方法的有效性。首先我们给出凸分布函数条件（convex distribution function condition，CDFC）的定义：

定义 7.15 当且仅当对于所有的$\gamma \in [0,1]$，

$$F\left(x, \gamma a-(1-\gamma) a'\right) \leq \gamma F(x, a)+(1-\gamma) F\left(x, a'\right) \tag{7.52}$$

也即$F_{aa}(x,a) \geq 0$，我们说分布函数$F(x,a)$ 满足CDFC。

一个特殊的例子是$f(x,a) \equiv a\bar{f}(x)+(1-a)\underline{f}(x)$，其中$\bar{f}(x) \succeq_{FOSD} \underline{f}(x)$。

Rogerson（1985）提出：FOA在$F(x,a)$ 满足MLRP和CDFC的情况下是有效的。一个常用但不正确的证明是：

$$\begin{aligned}
&\int_{x}^{\bar{x}} u(w(x)) f(x,a) dx-\Psi(a) \\
=&u(w(x)) F(x,a)|_{x}^{\bar{x}}-\int_{x}^{\bar{x}} u'(w(x)) \frac{dw(x)}{dx} F(x,a) dx-\Psi(a) \\
=&u(w(\bar{x}))-\int_{x}^{\bar{x}} u'(w(x)) \frac{dw(x)}{dx} F(x,a) dx-\Psi(a)
\end{aligned}$$

其中假定工资$w(x)$是x的可微函数。

对a两次求导可得：

$$-\int_{x}^{\bar{x}} u'(w(x)) \frac{dw(x)}{dx} F_{aa}(x,a) dx-\Psi''(a)<0 \tag{7.53}$$

在MLRP的假设下$\mu>0$，$w'(x)>0$，那么此时FOA就是有效的。

错误出在最后一次求导中（$\mu > 0$），在证明中，二阶条件假设被满足了，犯了循环论证的错误。正确的证明可参见Jewitt（1988）。

MLRP和CDFC是一个很强的假设，难以想象会有很多分布函数同时满足这两个性质。但一般均匀分布$F(x,a) = \left(\frac{x - \underline{x}}{\bar{x} - \underline{x}}\right)^{\frac{1}{1-a}}$，其中$a \in [0,1)$满足。相比之下，CDFC显得更强一些。例如$\tilde{x} = a + \tilde{\varepsilon}$，其中$\varepsilon$的分布满足CDFC，那么只有在它的密度函数是它的增函数的情况下，$\tilde{x}$才满足CDFC。

下列函数满足CDFC：

- 均值为αa的Γ分布：

$$f(x,a) = a^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/a} \Gamma^{-1}(\alpha)$$

- 均值为a的泊松分布：

$$f(x,a) = a^x e^{-a}$$

- χ^2分布：

$$f(x,a) = \Gamma^{-1}(2\alpha) 2^{-2a} x^{2a-1} e^{-x/2}$$

动态情况下同样有类似的问题，与离散时间模型不同之处在于，在合同期间其代理人对产出过程的控制是连续不断的。在这一框架中，最优的激励合同结构是怎样形成的呢?Schattler和Sung（1993）在一阶方法框架中推出了其充分条件。

时间连续时，生产函数由一个随机微分方程构成。通过放宽代理人的针对一阶条件的激励相容约束条件，这一问题就与随机最优控制问题联系起来。与Holmstrom 与Milgrom（1987）得到的结论相似，但这些条件只是必要条件，从对代理人的最优控制来看，这对于工资而言只是一种半鞅（semi-martingale）的形式。这一表述描述了工资是四个部分的总和，即1、代理人的机会成本；2、对代理人控制运作时的实际资金成本的补偿；3、由

于委托人不能观测代理人控制的努力程度，只能观测到实现的产出而据以制订激励性工资，应该对其中出现的错误进行补偿；4、对补偿方案的错误支付的风险奖金。鉴于较强的技术性，我们此处忽略了，有兴趣的读者可参照原文。

7.12 信号模型

Spence（1973）首次阐述了劳动力市场上求职者发信号的问题，假定有两种类型的求职者，两类求职者的生产率分别是$a_i, i = 1, 2$，其中$a_2 > a_1$，第一种类型的求职者的比例为$\lambda\,(0 < \lambda < 1)$。假设唯一可用的信号是求职者的受教育水平$s$，两类求职者受教育的边际成本分别是$c_i\,(s)\,, i = 1, 2$，$c_i' > 0$，并且对于所有$s > 0$，$c_1 > c_2$。

雇主根据求职者发出的信号提供相应的工资方案$w\,(s)$。令A是一个表示产出的随即变量，$P\,(A|s)$表示一个条件概率。如果存在一个s^*使得

$$\text{对于所有}s < s^*\text{，}P\,(A = a_1|s) = 1$$
$$\text{而对于所有}s \geq s^*\text{，}P\,(A = a_2|s) = 1$$

那么相应的工资方案$w\,(s)$就是

$$w\,(s) = \begin{cases} a_2, & \text{当}s \geq s^* \\ a_1, & \text{当}s < s^* \end{cases}$$

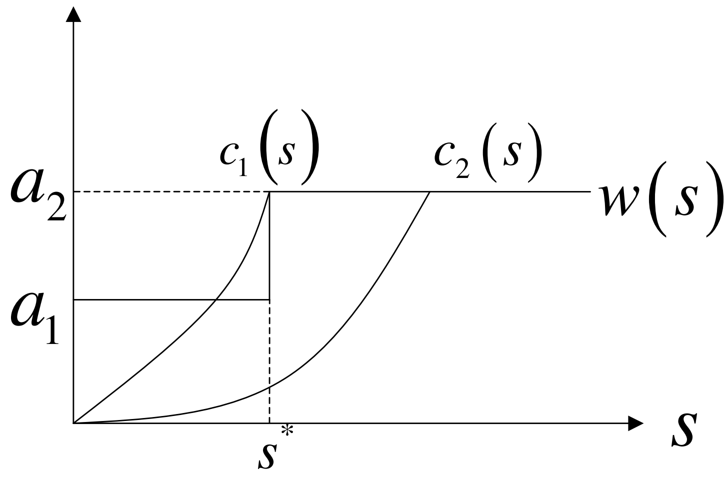

图 7.1: 工资方案

给定这样的工资方案，每种类型的求职者都会选择一个最优的信号水平s来最大化$w(s)-c_is$。值得说明的是，没有人会选择$s>s^*$，因为这样的信号水平并不能提高高生产率工人的工资反而提高了他们的信号成本；同样也没有人会选择$0<s<s^*$，这样的信号显然不如$s=0$，所以最后的均衡状况是所有第一种类型的求职者选择$s=0$，第二种类型的选择$s=s^*$。此时净收入分别是a_1和$a_2-c_2s^*$。

接下来我们来考虑一个信号均衡所要满足的条件，最重要的一个就是没有人有激励去伪装自己的类型，也即

$$\left\{\begin{array}{lll} a_2-c_2s>a_1 & \Rightarrow & s<\frac{a_2-a_1}{c_2} \\ a_1>a_2-c_1s & \Rightarrow & s>\frac{a_2-a_1}{c_1} \end{array}\right. \Rightarrow s_{\underline{s}}\equiv\frac{a_2-a_1}{c_1}<s<\frac{a_2-a_1}{c_2}\equiv s_{\overline{s}}$$

显然在区间$\left[s_{\underline{s}},s_{\overline{s}}\right]$上的信号水平都是可能的均衡，也即有无数多个信号均衡。但就福利的角度而言这些均衡并不是等价的：s^*的提高会伤害第二种类型求职者的利益但不影响第一种类型，这是很直观的。当然第一种类型

在信号均衡中的状况劣于无信号，因为$\bar{w} = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 > a_1$；而如果$a_2 - c_2 s^* < \bar{w}$，第二种类型也变得更差。

既然有无数多个均衡，那就产生了均衡效率比较问题。随着信号s^*水平降低，只要它还是一个均衡，第二类型的净收入就会提高，所以信号值应该有一个最低下限。考虑如下的情况：发信号对第二类型的求职者是更优的，即：

$$\begin{aligned} & a_2 - c_2 s > \bar{w} = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \\ \Leftrightarrow & c_2 s < \lambda (a_2 - a_1) \\ \Leftrightarrow & \lambda > \frac{c_2}{a_2 - a_1} \frac{a_2 - a_1}{c_1} = \frac{c_2}{c_1} \end{aligned}$$

从纳什效率的角度来看，即使$\lambda > \frac{c_2}{c_1}$（存在信号均衡），区间$[s_{\underline{s}}, s_{\overline{s}}]$上的信号值也并非都是纳什有效的，实际上只有$s_{\underline{s}}$才是纳什有效的。为了明白这一点，只要注意到当$s \in [s_{\underline{s}}, s_{\overline{s}}]$时，雇主就会提供工资方案$w(s)$，那么雇主提供的一定是$w(s_{\underline{s}})$，既然所有高类型的求职者都偏好于发信号，最后都集中到这一点，所以并非所有的信号均衡都是纳什有效的。

注意到$\lambda < \frac{c_2}{c_1}$意味着：

$$a_2 - c_2 s \le a_2 - c_2 s_{\underline{s}} = a_2 - (a_2 - a_1) \frac{c_2}{c_1} < a_2 - \lambda (a_2 - a_1) = \bar{w}$$

也就是说存在$\varepsilon > 0$，使得下式成立：

$$a_2 - c_2 s < \bar{w} - \varepsilon \tag{7.54}$$

其中$\frac{a_2 - a_1}{c_1} \le s \le \frac{a_2 - a_1}{c_2}$，或者等价地$s \in \left[\frac{a_2 - a_1}{c_1}, \frac{a_2 - a_1}{c_2}\right]$。

虽然由$\lambda < \frac{c_2}{c_1}$可以得到$a_2 - c_2 s < \bar{w} - \varepsilon$，但应该指出的是，前者是后者成立的充分条件而非必要条件。

如果$\lambda < \frac{c_2}{c_1}$，那么所有的信号均衡（分离均衡）都将被混同（pooling）均衡所取代。假设混同均衡的信号区间是$[s_{\underline{p}}, s_{\overline{p}}]$，当然如果$s_{\overline{p}} < s_{\underline{s}}$，区

间$\left[s_{\underline{s}}, s_{\overline{s}}\right]$和$\left[s_{\underline{p}}, s_{\overline{p}}\right]$没有任何交叉的空间。又因为当且仅当$\lambda > \frac{c_2}{c_1}$时，才有$s_{\underline{p}} < s_{\underline{s}} < s_{\overline{p}} < s_{\overline{s}}$，所以只有区间$\left(s_{\underline{s}}, s_{\overline{p}}\right)$上的信号才是和关于劳动力市场最初的假设相一致的。

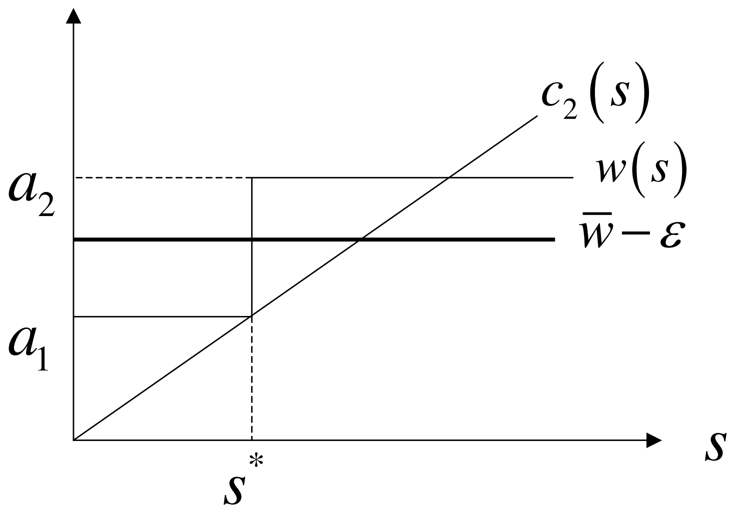

图 7.2: 混同均衡的情形

最后，我们来考虑这样一种情形：任一个Spence均衡，即$\left[s_{\underline{s}}, s_{\overline{s}}\right]$上的信号，都能被一个混同均衡破坏。虽然Spence考虑了第二种类型的求职者可以通过发信号来改善自己状况的条件，但他并没有考虑过如果他们不那么做会有什么事情发生。

现假定有一家企业提供上述的工资方案$\bar{w}-\varepsilon$，如果该工资方案能够带来一个非负利润而且所有的求职者都偏好于这一方案，那么它就破坏了信号均衡中的工资方案$w(s)$。既然$\bar{w}-\varepsilon > a_1$，那么所有第一种类型的求职者都会偏好于这种工资，同样如果$a_2 - c_2 s < \bar{w}-\varepsilon$，第二种类型的求职者也会偏好于该工资方案。显然图中所讨论的s满足这种条件。

不失一般性，假设此时的生产函数是线性的，即$f = x\mu_A$，那么企业的利润可以写成$\pi = x\mu_A - x(\bar{w}-\varepsilon)$，其中$\mu_A = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 = \bar{w}$，所以利

润$\pi = x\varepsilon > 0$。而信号均衡$w(s)$下的利润是0，混同均衡带来更多的利润并且吸引所有类型的求职者，从而破坏了信号均衡。因此，究竟有多小一部分的第二种类型的求职者能够从信号均衡中获益，取决于边际信号成本的比例（即c_2/c_1）。

另外，Spence模型中得到的信号均衡使用了这么一个假设：所有第二种类型的求职者都会发信号，而所有第一种类型的求职者都不会发信号，这也就是说，他首先假设存在信号均衡，然后才来决定支持这种均衡的信号区间。但是我们也可以假设存在混同均衡，那么支持该均衡的信号区间就会不一样，因为如果第二种类型的求职者不发信号，他会得到一份混同均衡工资$\bar{w}$。给定存在一个混同均衡，其信号区间要满足如下条件：

$$\begin{cases} a_2 - c_2 s & < & \bar{w} \\ a_2 - c_1 s & < & \bar{w} \end{cases}$$

从中我们可以得到混同均衡区间$\left[s_{\underline{p}}, s_{\overline{p}}\right]$，其中

$$\begin{aligned} s_{\underline{p}} \equiv & \frac{a_2 - \bar{w}}{c_1} = \lambda \frac{a_2 - a_1}{c_1} = \lambda s_{\underline{s}} \\ s_{\overline{p}} \equiv & \frac{a_2 - \bar{w}}{c_2} = \lambda \frac{a_2 - a_1}{c_2} = \lambda s_{\overline{s}} \end{aligned}$$

由假设$\lambda < 1$可知$s_{\underline{p}} < s_{\underline{s}}$，$s_{\overline{p}} < s_{\overline{s}}$。

7.13 甄别

Stiglitz（1975）论证了不完美信息下的经济体系和完美信息下有着本质的不同，其中一个重要的不同就是甄别（screening），本节我们来详细阐述他的甄别理论。

假设只有两种类别的工人，第一类工人的概率是p，他们唯一的区别是生产率：$\theta_i, i = 1, 2$，而且只有他们自己知道自己的生产率，雇主不知道。而雇主是风险中性的，市场是竞争性的，即雇主的利润是0。

不妨假设工人们是在一条生产线上生产，无法确切地观测每个工人的产出（或者这样做的成本太高）。生产线的总产出是$l\mu_\theta$，其中l是生产线上工人的总数，$\mu_\theta = p\theta_1 + (1-p)\,\theta_2$是生产线的平均生产率。因为无法辨认每个工人的生产率，所以每个工人得到的工资相等，等于他所属生产线的平均值。如果一个工人可以确认为高生产率的，那么他将得到一个高的工资。因此高生产率的工人有激励让雇主知道自己的类型。

不失一般性，假设$\theta_2 > \theta_1$，对每个被甄别的个人而言甄别成本是$c > 0$，且满足

$$\theta_2 - \theta_1 > c > \theta_2 - \mu_\theta$$

显然在完美信息假设下，类型i的工人得到的工资为$w_i = \theta_i$。但在不完美信息下却又两种可能的均衡。

第一种均衡下没有甄别。由于没有甄别，无法辨认每个人的生产率，每个人都得到均衡工资$w = \mu_\theta$，雇主利润$\pi = \mu_\theta l - wl = 0$。为了说明这是一个均衡，我们只要注意到高生产率的工人去甄别不是有利可图的：如果甄别，得到工资θ_2，扣除甄别成本c，可知此时的净收入为$\theta_2 - c$，小于没有甄别时的工资μ_θ。同样可知低生产率的工人也不会去甄别。第二种均衡下完全甄别（full screening）：高生产率的工人得到的工资θ_2，净收入为$\theta_2 - c$（扣除甄别成本c）；低生产率的工人得到工资θ_1。在这种均衡下，由于低生产率的工人知道自己的类型从而不会付费去甄别，而高生产率的工人如果不甄别，只能得到低生产率工人的工资$\theta_1 < \theta_2 - c$，所以他们一定会甄别。易知此时雇主的利润也是0。

从这个简单的例子我们可以得到以下四个关于甄别的性质：

- 可能有多个均衡。
- 一些均衡帕累托劣于另一些均衡。在这个例子中，完全甄别中每种类型最后得到的收入都少于没有甄别时的情形：高生产率$\mu_\theta > \theta_2 - c$；低生

产率$\mu_\theta > \theta_1$。

- 在两种均衡下，低生产率工人的存在都降低了高生产率工人的收入，即高生产率工人本应得到的收入$\theta_2 > \mu_\theta, \theta_2 > \theta_2 - c$；相反高生产率工人的存在或许会提高低生产率工人的收入：在没有甄别的均衡中，低生产率工人实际得到的大于他们本应得到的，即$\mu_\theta > \theta_1$，但在完全甄别均衡中他们的收入没有变化。

- 如果教育的功能之一是鉴别个人，那么社会收益（忽略分配效应）不同于私人收益。在本例中，高生产率工人的私人收益是
$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{c} - 1 > 0$$
而总社会收益却是0，净社会收益为负（因为存在一个甄别成本）。

许多甄别均衡都有如下的性质：有甄别时，一些人的状况变得更好而令一些人却变得更糟，但社会总福利却降低了。但这并不能说甄别不是帕累托最优的，如果我们假设$\theta_2 - \theta_1 > \theta_2 - \mu_\theta > c$，没有甄别的均衡就不再成立（此时高生产率工人甄别的收益大于其成本），但从一个整体来看，甄别的收益仍是小于成本。也许读者会发问：如果禁止甄别，就可以把甄别费用在这两种类型人之间分配从而让每个人的状况都变得更好。但这种观点明显没有理解到不完美信息最本质的内容：在没有甄别的情况下，没有任何部门知道谁的生产率高！

接下来我们考虑另外一种情形：生产线上平均每个工人的产出是$\mu - \beta\sigma^2$，其中σ^2是该生产线上所有工人生产率的方差，这表明同质劳动效率更高。并假定：
$$\theta_2 - \mu_\theta < \theta_2 - \theta_1 < c < \theta_2 - \left(\mu_\theta - \beta\sigma_\theta^2\right)$$
其中μ_θ和σ_θ^2分别是没有甄别时总体生产率的期望均值和方差。在这样的假设下，我们可以说均衡（这个均衡也是唯一的）中没有甄别，每个人都得到

工资$w=\mu_\theta-\beta\sigma_\theta^2$。为了说明这一点，假设现在有一个高生产率的工人要甄别，那么他得到$\theta_2-\beta\sigma_\theta^2-c<\mu_\theta-\beta\sigma_\theta^2$，劣于不甄别的情形。虽然完全甄别是帕累托最优的（此时低生产率工人得到$\theta_1>\mu_\theta-\beta\sigma_\theta^2$，高生产率工人得到$\theta_2-c>\mu_\theta-\beta\sigma_\theta^2$），但完全甄别却不是一种均衡，因此此时高生产率的工人不会去付费甄别，而是伪装成低生产率的工人，得到的工资$\theta_1>\theta_2-c$。

最后我们再来分析一下工作匹配甄别（job-matching screening）：令α_{ij}表示i类型的工人在第j项工作上的生产率，我们假设$\alpha_{12}<\alpha_{11}$和$\alpha_{21}<\alpha_{22}$，并且还假设$\alpha_{22}>\alpha_{11}>\alpha_{21}>\alpha_{12}=0$，这意味着第二项工作是是需要技术的工作，第二类型的工人是高技能的。例如第一种类型的工人是建筑工人，第二种类型是计算机程序员，显然每种类型的工人都有适合自己的特定工作，但建筑工人无法编计算机程序（$0=\alpha_{12}$），而程序员可以做建筑，虽然生产率不如建筑工人高（$\alpha_{11}>\alpha_{21}$）。如果没有甄别的话，那么所有的工人都会做第一项工作。我们仍以建筑工人和程序员为例，如果他们都做第二种工作的话，建筑个人无法编出程序（$\alpha_{12}=0$），而程序员水平的人一旦工作就显示出了他们的私人信息，但是大家都是领同样多的工资，所以程序员在此情况下一定会选择伪装成建筑工人，但是如果这样的话，由于$\alpha_{12}=0$，总产出就是0，这导致任何高于0的平均工资都不是一个均衡，因而无甄别情况下大家都做第二项工作，不是一个均衡。

记此时的平均工资是μ_1，由于没有甄别时所有人都做第一项工作，那么则有：

$$\mu_1=(1-p)\,\alpha_{11}+p\alpha_{21}$$

那么对于充分小的p而言，有$\mu_1>\mu_2=p\alpha_{22}$（$\alpha_{12}=0$），这是因为：

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}-p\alpha_{11}+p\alpha_{21}>p\alpha_{22}\\ \Leftrightarrow&\alpha_{11}>p\left[\alpha_{22}+(\alpha_{11}-\alpha_{21})\right]\\ \Leftrightarrow&p<\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}+(\alpha_{11}-\alpha_{21})}\end{aligned}$$

如果甄别的成本分别是以下情况，那么则有如下相应的结论：

- 如果$\max[\alpha_{22}-\mu_1,\alpha_{11}-\mu_1] < c < \alpha_{22}-\alpha_{11}$，那么均衡中不存在甄别。这是因为如果第二种类型的工人甄别，他的净收益是$\alpha_{22}-c<\mu_1$；同样第一种类型甄别后的净收益$\alpha_{11}-c<\mu_1$。
- 如果$\max[\alpha_{22}-\alpha_{11},\alpha_{11}-\mu_1] < c < \alpha_{22}-\mu_1 < \alpha_{22}-\alpha_{21}$，那么均衡中第二种类型的工人甄别比例为$\lambda$，其中

$$\alpha_{22}-c=\frac{(1-p)\,\alpha_{11}+(1-\lambda)\,p\alpha_{21}}{1-p+(1-\lambda)\,p}\equiv h(\lambda)$$

  注意到$\frac{1-p}{1-p+(1-\lambda)p}$是均衡中实际生产率为$\alpha_{11}$的工人比例，而$\frac{(1-\lambda)p}{1-p+(1-\lambda)p}$是均衡中实际生产率为$\alpha_{22}$的工人比例，那么一定有$0<\lambda<1$，不然如果$\lambda=0$，则有$\alpha_{22}-c>h(0)=(1-p)\,\alpha_{11}+\alpha_{21}=\mu_1$，这意味着所有的所有第二种类型的工人都应该甄别，明显和$\lambda=0$相矛盾；同样当$\lambda=1$时，可得$\alpha_{22}-c<h(1)=\frac{(1-p)\alpha_{11}}{1-p}=\alpha_{11}$，又和$\lambda=1$矛盾。

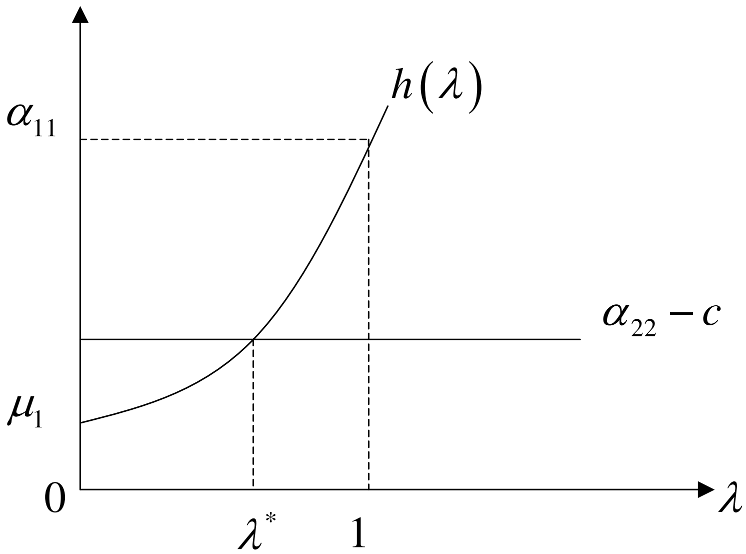

图 7.3: 工资匹配甄别

其实函数$h(\lambda)$可以看作是在第一项工作上所有工人的平均生产率，或者说是这个工作的平均工资。在上述两种情形下，最大化总体净收益都要求$\lambda=1$。在没有甄别的情形中，净收益是μ_1，而甄别下的净收益是：

$$\begin{aligned}&(1-p)\alpha_{11}+p(1-\lambda)\alpha_{21}+p\lambda\alpha_{22}-p\lambda c\\=&\mu_1+p\lambda(\alpha_{22}-\alpha_{21}-c)>\mu_1\end{aligned}$$

其中左手边由于假设$\alpha_{22}-\alpha_{21}-c>0$，所以在$\lambda=1$取得最大值。

对此我们可以说，存在$c-s=\alpha_{22}-\alpha_{21}$的补贴$s$（这可通过一揽子的税收筹集到）可以让每种类型的人状况都变得更好。等价地，如果$\alpha_{21}<\alpha_{11}$，几乎总是没有甄别。

7.14 动态甄别

本节我们以垄断企业的产品质量为例来说明动态甄别问题。假定垄断企业生产质量为q的产品的单位成本是$C(q)=\frac{1}{2}q^2$，质量为q的产品对θ类型的消费者的价值是$u(q,\theta)=\theta q$，不妨假设双方都是风险中性的，即$V=t-C(q),U=\theta q-t$，其中t是转移支付，社会福利为$S(q,\theta)=\theta q-C(q)$。

首先我们来看消费者类型是连续时的情形，此时θ在区间$[\underline{\theta},\overline{\theta}]$上随机分布，分布函数为$P(\theta)$，此时垄断企业不可能在每一点都能区分消费者的类型。如果θ类型的消费者被认为是$\hat{\theta}$类型时，他在第二阶段均衡中的支付是$U_2\left(\hat{\theta}\right)$，那么如果对某些$\theta$而言存在完全分离均衡的话，一定有$U_2(\theta|\theta)=0$，而且如果$\hat{\theta}$和$\theta$之间存在分离均衡的话，那么$U_2\left(\hat{\theta}|\theta\right)=\max\left\{\left(\hat{\theta}-\theta\right)q\left(\hat{\theta}\right),0\right\}$。我们假定$\theta$类型可以被从$\hat{\theta}=\theta-\mathrm{d}\theta$分离出来，这其中的逻辑推理是：高类型的消费者通过在第一阶段撒谎，仅仅遭受一个二阶（相对$\mathrm{d}\theta$而言的无穷小）损失，但由于在第二阶段被认为低类型的消费者，收益提高了一阶数量：$\delta U_2(\theta-\mathrm{d}\theta|\theta)$，我们可以得到如下定理：

定理 7.16 对于第一阶段中的任何一个合同而言，在$\left[\underline{\theta},\overline{\theta}\right]$中不存在非退化的子区间使得在这个区间上存在完全分离均衡。

证明：使用反证法，假设原命题不成立，在区间$(\theta_0,\theta_1)\subset\left[\underline{\theta},\overline{\theta}\right]$上存在完全分离均衡。

首先，我们从该子区间上取$\theta>\hat{\theta}$，那么由激励相容条件可得

$$
\begin{aligned}
&\theta q\left(\theta\right)-t\left(\theta\right)\geq\theta q\left(\hat{\theta}\right)-t\left(\hat{\theta}\right)+\delta U_2\left(\hat{\theta}|\theta\right)\\
&\hat{\theta}q\left(\hat{\theta}\right)-t\left(\hat{\theta}\right)\geq\hat{\theta}q\left(\theta\right)-t\left(\theta\right)
\end{aligned}
$$

其中第一个条件是说高类型的消费者可以在第一阶段欺骗企业而得到一个正的租。但在第二阶段没有任何类型的消费者可以获得租。

两个不等式相加可以得到：

$$\left(\theta-\hat{\theta}\right)\left(q\left(\theta\right)-q\left(\hat{\theta}\right)\right)>0$$

这也就是说$q\left(\theta\right)$在区间(θ_0,θ_1)上严格递增。这个结果与任何一个不等式结合都可以得到$t\left(\theta\right)$也是严格递增的。

然后我们考虑这个子区间上一个可微的点θ。由θ和θ+dθ之间的激励相容条件可得：

$$\theta q\left(\theta\right)-t\left(\theta\right)\geq\theta q\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)-t\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)$$

又可以写成

$$t\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)-t\left(\theta\right)\geq\theta q\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)-\theta q\left(\theta\right)$$

两边同除dθ，并由微分的性质可得：

$$\frac{\mathrm{d}t\left(\theta\right)}{\mathrm{d}\theta}\geq\theta\frac{\mathrm{d}q\left(\theta\right)}{\mathrm{d}\theta}$$

同样来考虑θ和$\theta-\mathrm{d}\theta$之间的激励相容条件，此时被误以为是$\theta-\mathrm{d}\theta$类型的θ类型的消费者在第二阶段能得到租金为$U_2\left(\theta-\mathrm{d}\theta|\theta\right)=q\left(\theta-\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\theta>0$的

租，那么易得：

$$\theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta - \mathrm{d}\theta) - t(\theta - \mathrm{d}\theta) + \delta U_2(\theta - \mathrm{d}\theta|\theta)$$

类似地我们可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}t(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \leq \theta\frac{\mathrm{d}q(\theta)}{\mathrm{d}\theta} - \delta q(\theta)$$

这两个结论可以写成

$$\theta\frac{\mathrm{d}q(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \leq \frac{\mathrm{d}t(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \leq \theta\frac{\mathrm{d}q(\theta)}{\mathrm{d}\theta} - \delta q(\theta)$$

显然这是一个矛盾，故假设不成立，原命题成立。

Laffont和Tirole（1988）刻画了这个均衡的性质，此时对于所有的θ而言，有

$$q(\theta) = \theta - \frac{1 - P(\theta)}{p(\theta)}$$

接下来我们分析消费者类型是离散时的情形。不妨假设只有两种类型的消费者：$\underline{\theta} < \overline{\theta}$，其中前者的概率是$p$，记$\Delta\theta = \overline{\theta} - \underline{\theta}$。对企业而言，有以下三种类型的激励相容合同：

类型一：仅有高类型消费者的激励相容条件紧；

类型二：仅有低类型消费者的激励相容条件紧；

类型三：两种类型消费者的激励相容条件都紧。

显然第二种合同对企业而言决不会是最优的。

首先我们来考虑第一种类型的激励合同。假设$\overline{\theta}$类型的消费者选择高类型合同$(\overline{q}_1, \overline{t}_1)$的概率$1 - \alpha$，选择$\left(\underline{q}_1, \underline{t}_1\right)$的概率是$\alpha$。在这类合同中，只要消费者选择了$(\overline{q}_1, \overline{t}_1)$，企业的信念就会退化成$\overline{v} = 1$，即认为是高类型的概率是1；而消费者若是选择了$\left(\underline{q}_1, \underline{t}_1\right)$，则企业认为他是高类型的概率由贝叶斯法则可知为$\underline{v} = \frac{\alpha p}{\alpha p + (1-p)} < p$，而且有$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\alpha} > 0$。我们定义信念为$v$的提供静态

最优合同的企业在不对称信息的单期期望利润是

$$\pi(v)=\max_{\overline{q},\underline{q}} v\left(\overline{\theta}\overline{q}-C(\overline{q})-\Delta\theta\underline{q}\right)+(1-v)\left(\underline{\theta}\underline{q}-C(\underline{q})\right)$$

在第二阶段，企业在信念v的条件上提供最优合同，这意味着$\overline{q}_2=\overline{\theta}$，$\underline{q}_2(\alpha)=\underline{\theta}-\alpha\frac{p}{1-p}\Delta\theta$，此时记利润为$\pi(\underline{v}(\alpha))$，那么剩下来就是计算第一阶段的$\left\{\overline{q}_1,\underline{q}_1,\alpha\right\}$。正式地，我们有：

$$\begin{aligned}\max_{\left\{(\overline{q}_1,\overline{t}_1),(\underline{q}_1,\underline{t}_1),\alpha\right\}} & p\left\{(1-\alpha)\left[\overline{t}_1-C(\overline{q}_1)+\delta\pi(1)\right]+\alpha\left[\overline{t}_1-C(\overline{q}_1)\right.\right.\\ &\left.\left.+\delta\pi(\underline{v}(\alpha))\right]\right\}+(1-p)\left[\overline{t}_1-C(\overline{q}_1)+\delta\pi(\underline{v}(\alpha))\right]\\ s.t.\quad & (\overline{\text{IC}}):\overline{\theta}\overline{q}_1-\overline{t}_1=\overline{\theta}\underline{q}_1-\underline{t}_1+\delta\Delta\theta\underline{q}_2(\alpha)\\ & (\underline{\text{IR}}):\underline{\theta}\underline{q}_1-\underline{t}_1=0\end{aligned}$$

其中$U_2\left(\underline{v}(\alpha)|\overline{\theta}\right)=\Delta\theta\underline{q}_2(\alpha)$。

随着α的递增，企业的利润在降低（因为企业从中了解到的信息随之减少），但同时也降低了第二阶段中的$\underline{q}_2$，反过来这削弱了高类型消费者在第一阶段的激励相容条件。这样在由混同均衡所造成的效率损失和高类型消费者获得的租之间就存在一个权衡。通过替换约束条件并化简我们可以得到：

$$\begin{aligned}\max_{\left\{\overline{q}_1,\underline{q}_1,\alpha\right\}} & p(1-p)\left[\overline{\theta}\underline{q}_1-C(\overline{q}_1)-\Delta\theta\underline{q}_1-\delta\Delta\theta\underline{q}_2(\alpha)\right]\\ &+(1+p+\alpha p)\left[\underline{\theta}\underline{q}_1-C(\overline{q}_1)\right]+p(1-\alpha)\delta\pi(1)\\ &+(1-p+\alpha p)\delta\pi(\underline{v}(\alpha))\end{aligned}$$

一阶条件分别是

$$\begin{aligned}\overline{q}_1&=\overline{\theta}\\ \underline{q}_1&=\underline{\theta}-\frac{p-\alpha p}{1-p+\alpha p}\Delta\theta\end{aligned}$$

从中可以看出，只要$\alpha>0$，$\underline{q}_1$就严格高于静态合同下的水平。

对于$\underline{q}_1$而言，其目标函数也可以写成：

$$\underline{q}_1 = \arg\max_q \alpha p \left(\overline{\theta} q - C(q)\right) + (1-p)\left(\underline{\theta} - C(q)\right) - p\Delta\theta q$$

很容易地就可以把$\underline{q}_1$看作是混同均衡的效率损失成本和让度给高类型消费者的租之间的权衡。而由于$\frac{\partial \alpha^*}{\partial \delta} > 0$，所以对于足够大的$\delta$值而言，低类型消费者的激励相容条件变为松弛（slack），第二类合同就失败了。

接下来我们分析第三种类型的合同。记高类型消费者选择$\left(\underline{q}_1, \underline{t}_1\right)$的概率为$\alpha$，低类型消费者选择$\left(\overline{q}_1, \overline{t}_1\right)$的概率为$\beta$。由贝叶斯规则可知：

$$\bar{v}(\alpha,\beta) \equiv \frac{p(1-\alpha)}{p(1-\alpha)+(1-p)\beta}$$
$$\underline{v}(\alpha,\beta) \equiv \frac{p\alpha}{p\alpha+(1-p)\beta}$$

从中我们可以得出：$\overline{q}_2 = \overline{\theta}$，$\underline{q}_2 = \underline{\theta} - \frac{v}{1-v}\Delta\theta$以及$U_2\left(v|\overline{\theta}\right) = \Delta\theta \underline{q}_2(v)$。那么企业的问题就变为：

$$\begin{aligned}
\max_{\left\{\overline{q}_1, \underline{q}_1, \alpha, \beta\right\}} & \left[p(1-\alpha)+(1-p)\beta\right]\left[\overline{t}_1 - C(\overline{q}_1) + \delta\pi\left(\bar{v}(\alpha,\beta)\right)\right] \\
& + \left[p\alpha + (1-p)(1-\beta)\right]\left[\underline{t}_1 - C\left(\underline{q}_1\right) + \delta\pi\left(\underline{v}(\alpha,\beta)\right)\right] \\
s.t. \quad & \left(\overline{IC}\right): \overline{\theta}\overline{q}_1 - \overline{t}_1 + \delta U_2\left(\bar{v}(\alpha,\beta)\right) = \overline{\theta}\underline{q}_1 - \underline{t}_1 + \delta U_2\left(\underline{v}(\alpha,\beta)\right) \\
& \left(\underline{IC}\right): \underline{\theta}\underline{q}_1 - \underline{t}_1 = \underline{\theta}\overline{q}_1 - \overline{t}_1 \\
& \left(\underline{IR}\right): \underline{\theta}\underline{q}_1 - \underline{t}_1 = 0
\end{aligned}$$

由三个限制条件可得：

$$\Delta\theta\left(\overline{q}_1 - \underline{q}_1\right) = \delta\left[U_2\left(\underline{v}(\alpha,\beta)\right) - U_2\left(\bar{v}(\alpha,\beta)\right)\right]$$

那么目标函数可以重写为：

$$\begin{aligned}
\max_{\left\{\overline{q}_1, \underline{q}_1, \alpha, \beta\right\}} & \left[p(1-\alpha)+(1-p)\beta\right]\left[\underline{\theta}\overline{q}_1 - C(\overline{q}_1) + \delta\pi\left(\bar{v}(\alpha,\beta)\right)\right] \\
& + \left[p\alpha + (1-p)(1-\beta)\right]\left[\underline{\theta}\underline{q}_1 - C\left(\underline{q}_1\right) + \delta\pi\left(\underline{v}(\alpha,\beta)\right)\right] \\
s.t. \quad & \overline{q}_1 - \underline{q}_1 = \delta\left[\underline{q}_2\left(\underline{v}(\alpha,\beta)\right) - \underline{q}_2\left(\bar{v}(\alpha,\beta)\right)\right]
\end{aligned}$$

从一阶条件可知一般而言，$\overline{q}_1$都不是有效的。

Laffont和Tirole（1993）证明，一个很可能的结果是$\overline{q}_1 < \theta < \underline{q}_1$。

练习 7.1 考虑如下的一个信贷模型：假定一个企业的生产函数是规模递减的，投资k能以概率p获得$R(q)\,k^{\theta}$的收益，其中$0 < \theta < 1$，以概率$1-p$获得0，其中项目唯一的特征是参数p，企业家可以观测到不为银行所知的项目特征。

另外我们假设资本的总成本是ρ，信贷市场是完全竞争的。初始财富为w的企业家需要借款$k-w$投资一个项目p，这里$p \in [p_0, p_1]$。$R(q) = Aq^{-\delta}$，其中$\frac{\rho}{1-\delta} > A > \rho$。

1、首先假设没有监督技术，那么均衡的信贷利率是多少？企业家将选择什么样的项目？将投资多少？（注意此时初始财富对投资和信贷的关系）。

2、如果有监督技术，监督成本是$M(a) = \alpha a^{\mu}$，其中$\mu \geq 1$。银行可以通过该技术来验证企业家是否采用了事先约定的项目，如果没有，她可以引入一个a的惩罚额（对企业家）。

- 写出此时企业家的激励相容约束和银行的参与约束。
- 当写出企业家面临利率r和监督水平a时的最大化问题。
- 给定p的选择，最优投资额是多少？

3、证明存在一个$\overline{w}$，使得财富为$\overline{w}$以上的企业家的激励相容不是紧的。

4、对于财富为$\overline{w}$以上的企业家，均衡时的r、p和k分别是多少？银行的最优监督水平是多少？

5、对于$w < \overline{w}$的财富水平而言，最优的监督水平是多少？

6、利用银行的参与约束，写出利率r关于p、k和w的函数。

7、对于$w < \overline{w}$，写出最优贷款合同(k,p)的最优化问题。

练习 7.2 一本新书的作者在写作过程中面临两种选择：勤奋或者偷懒。如果勤奋，书发行成功的概率是p_H，否则为p_L，作者勤奋的工作成本是$C > 0$。如果书发行成功，出版商获得y；如果失败，获得0。出版商决定作者的提成率θ，即作者获得θR，其中$R \in \{0, y\}$是出版商发行收入。作者的效用函数是$u = \log(1+w)$，其中w是他的货币收入。那么，最优的提成率是多少？

练习 7.3 地主L拥有一片土地和货币禀赋w_L，但没有劳力；佃农T拥有一个单位劳力和货币禀赋w_T，但没有土地。劳动的生产函数是$y = e + \theta$，其中y是产出，e是劳动程度，劳动给佃农带来的负效用是$ce^2/2$，θ是一个服从正态分布的随机变量：$\theta \sim N\left(0, \delta^2\right)$。假设土地、劳力和消费的市场均是完全竞争的，劳力的价格是m，土地的价格是p。所有的局中人都是风险厌恶的，并满足：

$$E[u(y)] = E(y) - \frac{r(w)}{2} Var(y)$$

其中$r(w)$是绝对风险厌恶系数，并有$r'(w) < 0$。

假设e是可观测的并且可以写入合同，合同采取线性的形式：$y_T = sy - R$。

1、写出地主和佃农的期望效用，并解出社会最优的劳动程度以及最优的合同、社会剩余S的最大值，佃农和地主的效用水平各是多少？

2、现在地主给佃农一个爱要不要的提案，那么这导致的e，s，R和S分别是多少？这里风险是如何影响固定租、佃农的劳动程度和总产出？如果地主是风险中性的，情形又将是怎样？如果佃农是风险中性的呢？

3、假设现在佃农拥有土地，那么此时佃农的劳动程度是多少？社会剩余相对上一问中是多还是少？（假定地主的效用为0。）